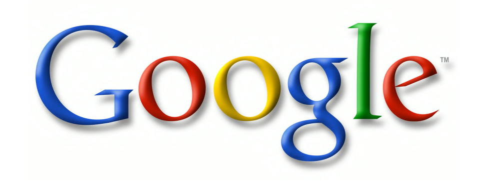
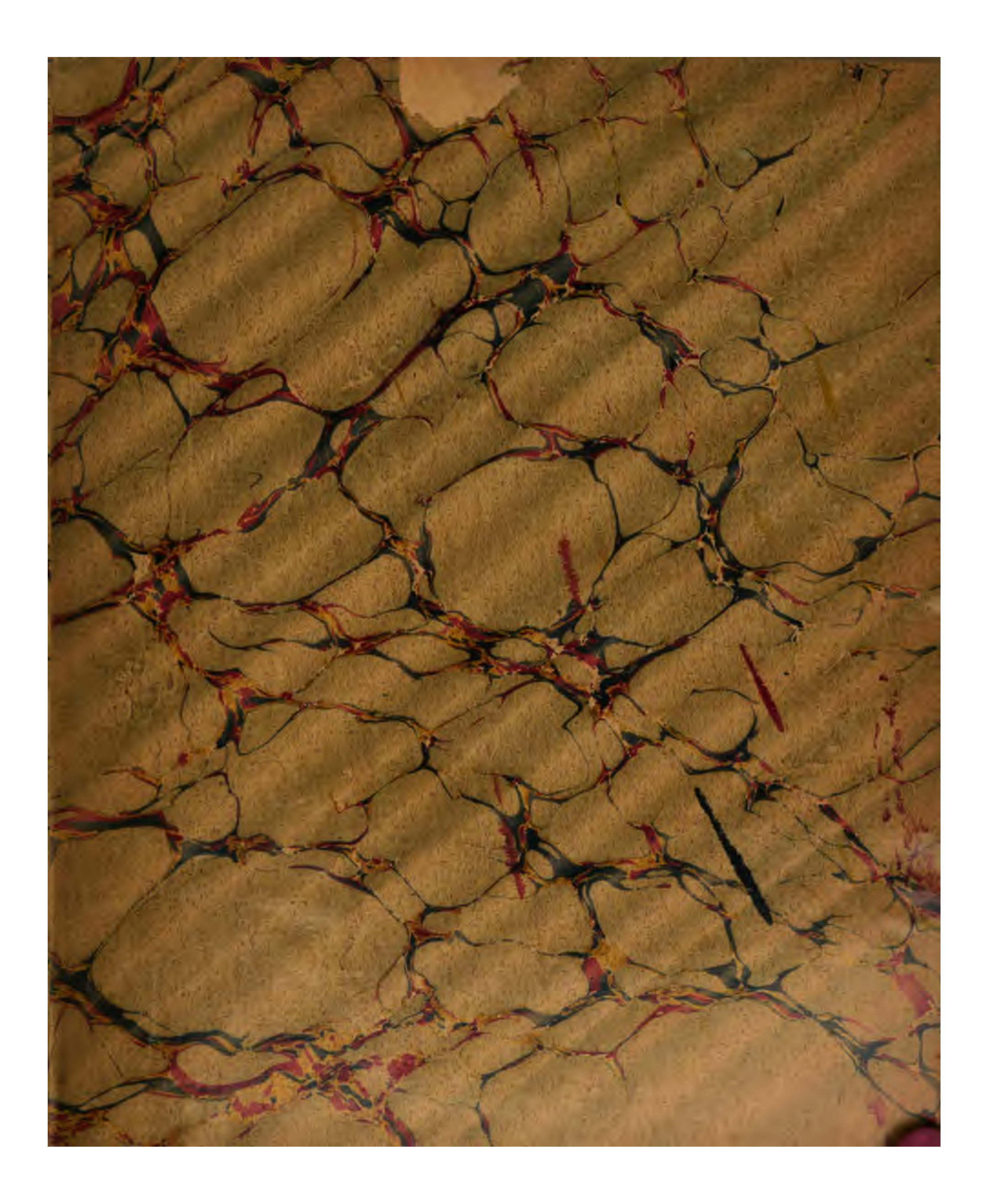



QA
33
G517
1884



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



ALBERT GIRARD,

INVENTION NOUVELLE

EN

L'ALGEBRE.

REIMPRESSION

PAR

DR. D. BIERENS DE HAAN.

L. L. D.

LEIDEN, 1884.

IMPRIMÉ CHEZ MURÉ FRÈRES.

PRÉFACE.

Ce traité, si rare maintenant, méritait bien, il me semble, une réimpression.

Or, on sait généralement qu'ici se trouvent les relations entre les racines et les coefficients d'une équation algébrique: mais en outre l'érudit éditeur des oeuvres de Simon Stevin a parsemé ce traité d'une foule de reductions et d'observations, souvent pratiques, qui sont d'un haut intérêt pour l'histoire de la science de ce temps-là.

Le titre déjà nous y fait distinguer plusieurs parties dans le contenu; et dans la dédicace l'auteur en dit:

„ces trois petits traictez, dont le premier n'est qu'une briefve introduction en l'Arithmetique, mais les deux autres contiennent quelques nouveautez en l'Algebre & Geometrie, incogneues non seulement des modernes, mais aussi des anciens."

En vérité la première partie (feuillet 4 à feuillet 7 verso) est intitulée „Complement Mathematiqve" et traite de quelques parties de l'Arithmétique.

La deuxième partie, sans titre spécial, (feuillet 8 à 28) traite des Radicaux (feuillet 9 verso), de l'extraction des Racines des multinomes Radicaux (feuillet 12 verso), Construction Algebraïque sur les

Questions (feuillet 14 verso), des Equations ordonnées (feuillet 16) de quelques théorèmes (feuillet 21 verso), le théorème connu de Girard mentionné ci-dessus (feuillet 23), des postposées quantitez en l'Algebre (feuillet 27).

Puis la partie troisième a le titre „De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée Par Albert Girard'' (feuillet 28 verso à 34 verso), pleine d'observations intéressantes.

Enfin (feuillet 34 verso à 35) „Du mesurer des angles solides lesquels sont circuits de superfices planes''.

Tout comme auprès de la réimpression des deux traités de Benedictus de Spinosa, ici j'ai fait réimprimer page pour page et ligne pour ligne; pour les figures j'en ai fait faire de fac-similés.

J'ose espérer que cette réimpression sera approuvée par ceux qui s'occupent de l'histoire de la science.

LEIDEN, Juillet 1884. D. BIERENS DE HAAN.

Invention nouvelle
EN
L'ALGEBRE,

PAR

ALBERT GIRARD

MATHEMATICIEN.

Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science.



A AMSTERDAM.
Chez Guillaume Iansson Blaeuw.
M. DC. XXIX.

A MONSIEVR

Monsr HENRY de BERGAIGNE Capitaine d'une Compagnie de Cavallerie pour Messeig^{rs} les Estats Generaux des Provinces Vnies des Pays Bas, Receveur des contributions de Brabant au quartier de Breda, &c.

MONSIEVR,

Entre les sciences lesquelles vous cherissez, & qui vous sont familieres, vous n'y avez pas simplement rangé les Mathematiques, mais aussi y avez fait un progrez au delà du vulgaire, laquelle chose, & principalement la renommée de vos vertus, m'ont acertené que vous recevriez d'un bon œil ces trois petits traictez, dont le premier n'est qu'une briefve introduction en l'Arithmetique, mais les deux autres contiennent quelques nouveautez en l'Algebre & Geometrie,

incogneues non seulement des modernes, mais aussi des anciens, & n'y a autre chose qui me poind presentement, sinon qu'elles sont un peu trop tost sorties de ma main pour leur donner quelque lustre, & aussi que je n'ay quelqu'autre subject tout apresté à vous demonstrer en effect que je me repute.

Monsieur,

Vostre tres-humble & tres-affectionné serviteur

Albert Girard.



COM-



COMPLEMENT

MATHEMATIQVE.

Les commencemens de l'Arithmetique.

PROLATION DES NOMBRES.

Articles

Premiere masse	Seconde masse	Troisiesme masse
Nombre	Bilion	Trilion
Mil	Mil Bilions	Mil Trilions
Milion	Milion de Bilions	Milion de Trilions
Mil milion	Mil Milion de Bilions	Mil Milion de Trilions

La quatriesme masse commence par quadrilion. La cinquiesme par quintilion &c. Chacune masse contient douze chiffres: les nombres vont à l'infiny: Chacun article contient trois termes, assavoir digite, dix, cent.

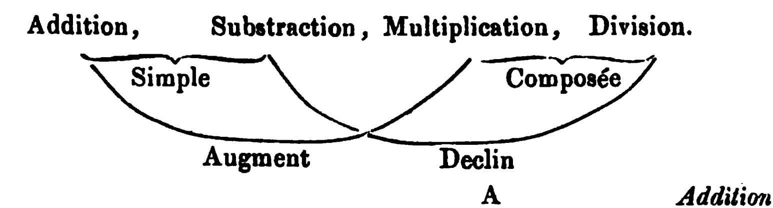
M. Milion de Trilions	Milion de Trilio:	M. Trilio:	Trilions	M. Milion de Milions *	Milion de Bilions	M. Bilio:	Bilions	M. Milions	Milions	Mils	Pieds
314	159	265	358	799	328	846	264	338	327	950	288
1	414	213	562	793	095	048	801	688	724	209	698

teste queue

DES 4 CONIVGAISONS.

Les 4 Conjugaisons communes, sont,

Addition, Substraction, Multiplication, Division.



*) Lisez: B. — Quand pour le nombre au-dessous, 79, on lit 97, on a l'expression de π. — La seconde ligne donne $\sqrt{2}$.

	Addition	*Soubstraction*	*Multiplication*	*Division*
Ingrediens	6 & 2	subject. 6 de exacteur 2	efficient 6 fois coefficient 2	dividende 6 en diviseur 2
Facits	8 Somme Aggregat	4 Reste Difference Exces Deffaut	12 Produict	3 Quotient

ADDITION.

SOyent proposez plusieurs nombres parfaits, trouver leur somme.

1	Ingrediens
6	
28	
496	
8128	
33550336	
8589869056	
8623428051	Somme

Demonstration pourquoy l'on retient.

	9876
	543
	2101
	23
	4567
	1189
	29
	27
	20
	16
Somme	18299

Commun proverbe.

Qui cognoist toutes les parties, peut cognoistre le tout.

SOVB-

SOVBSTRACTION.

Subject	2650005800091259287
Exacteur	84398365470688704
Reste	2565607434620570583
Preuve	2650005800091259287

Commun proverbe: Ayant le tout & la partie, le reste est cogneu.

MVLTIPLICATION.

```
 3090507
    3090
---------
278145630
9271521
---------
Produit 9549666630
```

```
Efficiens { 863247
          { 128713
     -----------
       2589741
       863247
      6042729
     6905976
    1726494
    863247
   -----------
Produit 111111111111
```

```
 5732
  13000
--------
17196000
5732
--------
74516000
```

A la multiplication par des nombres qui commencent par 1, & achevent tovt en zero: il ne faut que mettre les zero à la fin du nombre qu'on veut multiplier. 28 fois 10 est 280: Aussi 28 fois 100; c'est 2800.

Tout multiplicateur est nombre.

DIVISION.

S'Il y a plus d'une lettre au diviseur, & que la premiere soit moindre à la seconde; on aura quelque difficulté à sonder le quotient. Toutefois la division par 19 est facile, car elle commence par 1, (le moindre des Caracteres) & 9, le majeur des Caracteres: on prend au quotient la moitié des pairs, ou la plus grande moitié des impairs, si on peut:

Divisez 48706630017 par 19, viendra 2563506843.

S'il y a des zero à la queue du diviseur, il les faut mettre à la fin, sous la queue du dividende.

Item aussi de fois qu'on escrit le diviseur, autant faut il de lettres au quotient.

Le restant doit estre moindre au diviseur.

Divisez	10355524	par	3218	viendra 3218
	5177762		1609	
	20711048		6436	
	41422096		12872	

Quand le diviseur commence par 1 & acheve par zero, alors, il ne faut que retrancher du dividende autant de lettres & de mesme costé, assavoir du costé droit. Divisez 3218 par 10 viendra $321\frac{8}{10}$, le nombre est ainsi tracé 321|8: si par 100 ainsi 32|18: & si par 1000 ainsi 3|218. &c.

Diviser par une lettre

		Viendra	Divisez 79833600
par	2	....	39916800
	3	....	13305600
	4	....	.3326400
	5	....	..665280
	11	....	...60480
	10	....	6048
	9	....	672
	8	....	84
	7	....	12
	6	....	2

L'Addition & Soubstraction sont des effects contraires, de mesme la multiplication & division.

I. PREPARATION AVX FRACTIONS.

N*Ombres par soy premiers sont ceux qui n'ont autre mesure que soy & l'unité.*

Comme, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, &c. Les surpassez sont par soy composez, 4, 6, 8, &c. Apres cela suit la maniere de trouver toutes les mesures d'un nombre

N*Ombres entr'eux premiers sont ceux qui n'ont point d'autre commune mesure que l'unité.*

Comme

Comme 12 & 35 : car 2, 3, 4 & 6 mesurent bien le 12, aussi 5 & 7 mesurent bien 35, mais il ny a pas de nombre autre que 1 qui mesure l'un & l'autre.

Au contraire il y a des nombres entr'eux composez, qui ont quelque commune mesure autre que l'unité :

	12, 18.
Communes mesures.	6 La plus grande commune mesure est la plus exquise.
	3
	2
	1

DE plusieurs nombres proposez, trouver, s'ils sont premiers entr'eux, ou composez entr'eux, & quant & quand leur grande cōmune mesure.

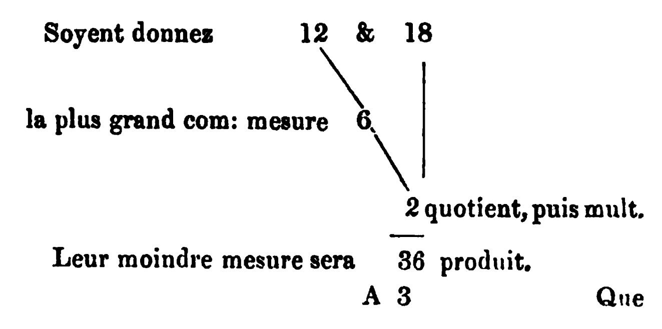
Soyent donnez 385 & 105 : Divisez le grand par le moindre, & le diviseur par le restant, sans tenir compte du quotient en cecy, jusques à ce qu'il ne reste rien : alors le dernier diviseur sera la plus grande commune mesure, comme icy 35: lequel mesure l'un en 11 fois, l'autre en 3, & n'y en a de plus grand, qu'iceluy qui les puisse mesurer tous deux:

Notez que quand 1 est la plus grand commune mesure, les nombres donnez seront premiers entr'eux, comme 512 & 343: & sensuit de là, que lors qu'il reste 1, que les nombres seront entr'eux premiers.

Soyent autrefois plus de deux nombres donnez 385, 105, 100: La plus grande commune des deux 385, 105 est, par la precedente construction, 35. Puis la plus grande commune mesure de 35 & l'autre, qui est 100, est 5 : parquoy 5 sera la plus grande commune mesure des trois nombres donnez 385.105.100. & ainsi en fera on de davantage.

De deux nombres donnez ou davantage, trouver leur moindre mesure.

Si les nombres sont entr'eux premiers, le moindre mesure d'iceux est leur produit. Mais si les nombres sont entr'eux composez, alors il faut trouver leur plus grande commune mesure, & faire, comme sensuit



Que s'il y a plusieurs nombres donnez, il faut rejetter les mesures, ou les nombres qui sont subalternes à quelque autre, & puis de deux à deux faire comme dessus : tellement que le moindre mesure de 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, est 27720 : là où on trouve de la facilité, en effaçant deux nombres entr'eux premiers & substituant en leur lieu leur produit.

II. PREPARATION AVX ROMPVS.

Nombre Rompu tire son origine de la seule division des entiers : tellement que le nombre rompu est une division imparfaite.

$$\begin{array}{l} \text{Note superieure } 2 \text{ ou numerateur} \\ \hline \text{Note inferieure } 3 \text{ ou denominateur} \end{array}$$

Mais les deux notes avec la ligne de separation s'appelle fraction ou rompu.

Fraction primitive est celle qui ne se peut abreger, & de qui les notes sont entr'elles premieres: comme $\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{2}{3}.\frac{12}{35}$. Autrement la fraction seroit derivative comme $\frac{50}{100}.\frac{6}{18}$ &c. & la maniere de trouver les derivatives s'appelle amplification, qui se fait lors qu'on multiplie les notes par un mesme nombre, comme $\frac{2}{3}$, chacune multipliée par 7 viendra $\frac{14}{21}$, qui est egale en valeur à sa primitive $\frac{2}{3}$. Au contraire, la maniere de trouver la primitive, s'appelle abrevation, qui se fait lors qu'on divise les notes par une commune mesure, & plus brievement par la plus grande commune mesure, comme $\frac{14}{21}$, divisant les notes par 7 viendra $\frac{2}{3}$; qui vaut autant que $\frac{14}{21}$.

Fraction propre, est celle qui est moindre à l'unité, ce qui se remarque lors que le numerateur est moindre au denominateur, comme $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ &c. mais l'impropre est au contraire, assavoir $\frac{5}{4}$ $\frac{6}{2}$ $\frac{7}{3}$ &c. Quant à l'unité divisée, l'egalité des nottes la fait cognoistre $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{4}{4}$ $\frac{5}{5}$ $\frac{6}{6}$ &c. Les nombres entiers, se mettent commodément en fraction impropre, en mettant l'unité pour denominateur $\frac{6}{1}$ vaut 6, $\frac{7}{1}$ vaut 7 &c. Les entiers joincts avec les fractions se changent aussi en fraction impropre; comme $2\frac{3}{4}$, disant 4 fois 2 font 8 & 3 font 11, pour numerateur, prenant le mesme denominateur 4 ainsi $\frac{11}{4}$ qui vaut $2\frac{3}{4}$.

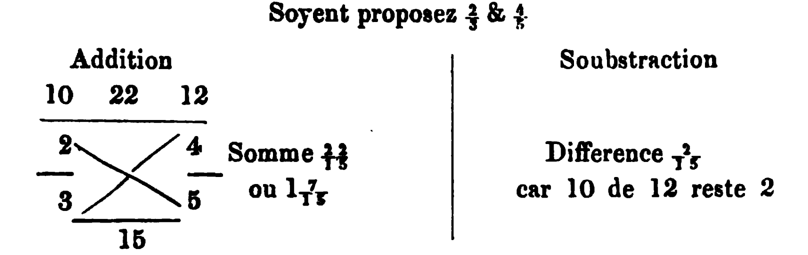
Au contraire, ayant une fraction impropre, on en peut demesler les entiers des fractions, s'il y en a comme $\frac{11}{4}$: car puis que les fractions ne sont que divisions imparfaites, il faut faire la division ordinaire, viendra $2\frac{3}{4}$ egal à $\frac{11}{4}$.

CON-

CONIVGAISONS DES FRACTIONS.

EN l'addition & soubstraction des fractiõs il y a de la facilité, lors que les denominations sont de mesme, car alors les numerateurs operent seulement: mais quand les denominations sont differentes, on fera comme sensuit.

Soyent proposez $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$



Car $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ sont mis en mesme denomination, assavoir $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$.

Or quand on voudra adjouster plusieurs fractions, on trouvera le moindre mesure de tous les denominateurs, comme icy 60, pour estre puis apres la commune denomination, puis adjouster les numerateurs trouuez.

60	
$\frac{2}{3}$	40
$\frac{5}{6}$	50
$\frac{2}{5}$	24
$\frac{3}{4}$	45
$\frac{5}{12}$	$\frac{25}{189}$

Somme $\frac{189}{60}$ ou $3\frac{3}{20}$

En la multiplication & division, on n'observe pas là la similitude des denominateurs; que s'il y a des entiers & fractions, on les remet en fraction impropre; s'il y a des entiers d'un costé sans fraction, on les remet en fraction, posant 1 pour nominateur *), comme il a estédit. Item en la multiplication on fait des paralleles; ainsi que si on multiplie $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ viendra $\frac{8}{15}$. Notez qu'en la multiplication & division, on abrege bien deux nombres qui ne sont pas en mesme ligne (ces lignes sont les paralleles

*) Lisez: denominateur.

leles de la multiplication, ou la croix de bourgoigne en la division :) la division se fait donc par la croix aussi bien que l'addition & soubstractiō; posant les nombres de solution sur le dividende, & non pas sur le diviseur. Divisez $\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{5}$ viendra $\frac{10}{12}$ ou $\frac{5}{6}$, car on divise bien un petit par un grand.

Ces lignes dont il a esté dit, sont croisées és trois conjugaisons, & sont paralleles en la multiplication ; elles servent à monstrer quels nombres il faut multiplier ensemble.

De la
REGLE DE TROIS.

LA regle de trois sert à trouver le 4e proportionel. Ordinairement on met les nōbres homologues aux deux extremitez, & doivent estre de mesme nom : Il faut multiplier les deux derniers ensemble, le produit se doit diviser par le premier, alors le quotient est de mesme nom que celuy du milieu: Si 3 aunes vallent 4 francs, combié vaudront 17 aunes? viendra $22\frac{2}{3}$ francs, car 4 fois 17 font 68, lequel divisé par 3, viendra $22\frac{2}{3}$ francs. Touchant ces fractions, si on les veut remettre en monnoye les $\frac{2}{3}$ francs, c'est à dire 2 francs qu'il faut diviser par 3 : Il faut bien noter l'habitude du premier au troisiesme, afin de distinguer la regle de trois directe, de la rebourse : on met le nombre de question à la fin, c'est à dire au 3 lieu, & son homologue au premier, tant en la directe, qu'en la rebourse : mais en la directe, si le premier est moindre au troisiesme, le second sera moindre au requis ; si majeur, majeur: ce qui n'est pas ainsi en la rebourse. Or en la rebourse on opere tout au rebours de la directe ; car on multiplie les deux premiers, & puis on divise le produit par le dernier : Si dans une forteresse, il y a des vivres pour 300 hommes 16 mois de long ; combien pour 100 hommes ?

300 hommes en 16 mois combien 100 hommes ?
16
——
48|00 — Viendra 48 mois.

Fin de l'introduction de l'Arithmetique.

Des

Des Caracteres des puissances & racines.

COmbien que les marques (2), (3), (4) &c. denotent les puissances, secondes, tierces, quartes, c'est à dire quarées, cubes, quaré-quarées &c. lesquelles on à fait servir seulement entieres, mais estant rompues le numerateur est la puissance, & le denominateur la racine, comme $(\frac{3}{2})$ 49, le 3 signifie la puissance cubique, & 2 la racine quarée; qu'on peut prononcer la puissance tierce de la racine seconde de 49, & communement le cube de la racine de 49, ou ce qui est tout un, la racine quarée du cube de 49, car c'est tousiours 343.

Notez que quand le Caractere precede le nombre, alors la signification est definie, comme cy dessus la valeur estoit 343 precisement & nul autre nombre, mais quand le caractere suit le nombre, alors la signification est indefinie, car qu'est-ce que 18 (2), ce n'est qu'un adjectif qui ne signifie rien de complet qu'en comparaison; je dis en comparaison, comme si on disoit de quelque nombre que les 18 (2) valent les 108 (1), alors ledit nombre est determiné & ne pourra estre autre chose que 6: toutefois le (0) est de signification finie, suivant un nombre, comme 18 (0) est 18 precisement, car c'est 18 nullement indefiny, quant à (1) 18, c'est le mesme que 18 (0) car ils s'accordent là.

Or pource que $\surd$ est en usage, on le pourra prendre au lieu de $(\frac{1}{2})$ à cause aussi de sa facilité, signifiant racine seconde, ou racine quarée; que si on veut poursuivre la progression on pourra au lieu de $\surd$ marquer $\sqrt[2]{}$; & pour la racine cubique, ou tierce, ainsi $\sqrt[3]{}$ ou bien $(\frac{1}{3})$, ou bié CC, ce qui peut estre au choix, mais pour en dire mon opinion les fractions sont plus expresses & plus propres à exprimer en perfection, & $\sqrt[3]{}$ plus faciles & expedientes, comme $\sqrt[5]{}$ 32 est à dire la racine quinte de 32, & est 2. Quoy que ce soit l'un & l'autre sont facils à comprendre, mais $\surd$ & CC sont pris pour facilité.

Des Caracteres de Conjonctions & Disjonctions, appellez signes.

Le signe + s'appelle *plus*, vaut autant à dire que &; ou bien *encore*, mais — ou ÷ signifie *moins*, en telle sorte qu'on dit 3 francs moins 5 sous, d'avantage = signifie difference entre les quantitez où il se treuve.

D'avantage voicy deux nouveaux caracteres qui sont necessaires, & viendront doresnavant en usage, assavoir

ff	plus que
§	moins que

Touchant les lettres de l'Alphabet au lieu des nombres: soit A & aussi B deux grandeurs: la somme est A+B, leur difference est A = B, (ou bien si A est majeur on dira que c'est A— B) leur produit est AB, mais divisant A par B viendra $\frac{A}{B}$ comme és fractions: les voyelles se posent pour les choses incognues.

Les 4 Conjugaisons des signes + & —

Addition.

Aux signes	semblables	prenés la	somme	avec le signe	Commun
	dissemblables		difference		du majeur nombre.

$$\begin{array}{r} 3+11+28-13-\ 5-\ 6+\ 3+5 \\ -5-\ 4-40+19+17-\ 7+\ 8-5 \\ \hline -2+\ 7-12+\ 6+12-13+11 \end{array}$$

Notez que le signe precede le nombre, & que pour brieveté on ne fait nulle marque devant le premier lors qu'il doit avoir +.

Soubstraction des signes + & —

Changez les signes de l'exacteur, & suivez la regle donnée en l'additiõ.

Soit proposée cette soubstraction.

$$\text{l'exacteur.}\ \left|\begin{array}{l} 7+31-17+4-\ 8-5+1-10+9 \\ 7+10-\ 6+9-12+7-6+\ 8-7 \end{array}\right.$$

Changez seulement les signes de l'exacteur ainsi & suivez la regle de l'addition.

$$\begin{array}{r} 7+31-17+4-\ 8-\ 5+1-10+\ 9 \\ -7-10+\ 6-9+12-\ 7+6-\ 3+\ 7 \\ \hline +21-11-5+\ 4-12+7-13+16 \end{array}\ \text{pour le requis.}$$

Autre

Autre regle pour la soubstraction.

aux signes	semblables	prenez la	difference	avec le signe	commun	si l'ordre est	droit	
	dissemblabes		somme		contraire d'enhaut.		renversé.	

20 — 6 + 12 — 3 — 2 + 3
12 — 2 + 15 — 8 + 4 — 8
8 — 4 — 3 + 5 — 6 + 11 pour le requis.

Multiplication des signes + & —

le multiplicateur estant	+	prenez les signes	d'enhaut
	—		contraire d'enhaut.

5 + 3 — 9 + 12 + 5 — 17 — 30
4 — 3
— 15 — 9 + 27 — 36 — 15 + 51 + 90
20 + 12 — 36 + 48 + 20 — 68 — 120
produit. 20 — 3 — 45 + 75 — 16 — 83 — 69 + 90

Division des signes + & —

On sçait que la division n'est autre chose que le meslange de la multiplication & soubstraction, car il faut oster du dividende le produit du diviseur & quotient, ce qui pourroit suffire sans en donner autre exemple, joint que les divisions ne sont si frequentes en l'algebre, sinon que quand il ny reste rien, toutesfois voicy la maniere commēt on fait ceste division.

Pour donner au quotient son sìgne competant, s'ensuit la regle commune tant en la multiplication qu'en la division.

Considerant le dividende & diviseur, alors és signes	semblables	prenez	+	pour le quotient.
	dissemblables		—	

Ayant ja un nombre avec son signe au quotient, le reste est facile; que si on veut achever comme s'ensuit, je le trouve plus aisé, c'est que multipliant à part le diviseur par le quotient (changeant le signe dudict quotient aussi à part) alors il faudra adjouster le produit avec le dividende, escrivant ce qui vient au dessus du dividende: & pour un exemple soit

pris pour dividende le produit de la multiplication precedente

20 — 3 — 45 + 75 — 16 — 33 — 69 + 90 lequel divisé par
5 + 3 — 9 + 12 + 5 — 17 — 30:

alors il viendra au quotient 4 — 3 sans rien rester à la fin: On fait bien deux signes consecutifs, mais rarement comme + — 3 qui vaut — 3: car le + antecedant n'altere en rien, mais bien le — antecedant, car il contrarie le suyvant.

Voyla touchant la Conjugaison des signes, & ce qu'il y a des nombres aupres, n'est que pour plus grand esclaircissement, car ils ne servent que aux choses diverses qu'on ne veut mesler: quant à l'extraction de la racine quarrée, on ne l'extrait que du +: exemple, soit + 9, sa racine est + 3 ou bien — 3: mais la racine de — 9 est indicible, & n'est ny + ny — en sa racine, & de la racine Cubicque alors + prend +, & — prend —: car la racine Cubicque de + 27 est + 3: mais de — 27 est — 3: la raison se voit en la generation des quarrez & Cubes, &c.

De la Multiplication & Division des radicaux.

Il faut eslever les nombres donnez esgalement jusques à ce qu'ils soyent de mesme nature, puis operant avec ces nombres eslevez, selon la question, on abaissera le facit autant qu'on avoit eslevé les donnez, pour le requis:

Exemple en Multiplication.

Soit à multiplier √ 3 & √ 5; je les esleve tous deux jusques à la seconde quantité, viendront 3 & 5 leur produit (pource qu'on requiert le produit) est 15, lequel il faut deprimer, prenant sa racine de seconde quantité (ou racine quarrée) & viendra √ 15 pour le produit requis:

Multipliez √ 5 par 3: leurs quarrez sont 5 & 9, dont le produit est 45, alors sa racine est le produit requis, qui est √ 45: De mesme multipliez √ 20, par ∁ 3, j'esleve l'un & l'autre esgalement, jusques à la sexte quantité, viendront 8000, & 9, (car le quarré de √ 20 est 20, son Cube est 8000, aussi le Cube de ∁ 3, est 3, son quarré est 9) leur produit est 72000, sa racine quarrée de racine Cubicque est √ ∁ 72000, pour le produit requis, & ainsi des autres.

Multipliez

Multipliez	√ 3	par	√ 5	viendra	√ 15
	√ 3		√ 12		√ 36, ou bien 6
	√ 5		6		√ 180
	∛ 4		∛ 16		∛ 64, ou 4
	√ 5		∛ 4		$(\frac{1}{6})$ 2000
	W 2		W 8		W 16, ou 2.

Il y a de la facilité en la practique, en ce qu'au lieu de les eslever, on les interprete tellement, qu'ils soyent de mesme espece & marque, alors leur produit a mesme marque: & ainsi $(\frac{1}{2})$8 par $(\frac{1}{3})$9 viendra $(\frac{1}{6})$41472:

La division se fait de mesme, car divisant √ 32 par √ 8 viendra √ 4 ou 2: pour avoir des exemples divisez, le produit cy dessus par l'un des efficients viendra l'autre.

Preparation à l'Addition & Soubstraction des Radicaux.

I.

Recognoistre si deux Radicaux sont Commensurables, ou non.

LEs vulgaires & radicaux sont tousiours incommensurables, pourtant est-ce que la proposition ne parle que des Radicaux soyent donnez √ 2 & √ 18: si leur quotient (divisant l'un par l'autre) est inexpliquable, en nombre vulgaire, ils seront incommensurables; mais estant expliquable, comme icy, ils seront commensurables; car divisant le grand par le moindre, viendra √ 9, qui est expliquable 3. Ou bien si on divise le moindre par le grand, viendra √ $\frac{1}{9}$, qui est aussi expliquable $\frac{1}{3}$: De mesme √ 8 & √ 18 sont commensurables, leur quotient est √ $\frac{9}{4}$ ou $\frac{3}{2}$: ou bien leur moindre quotient sera √ $\frac{4}{9}$ ou $\frac{2}{3}$: De mesme √ 3 & √ 27 seront commensurables, aussi √ $\frac{3}{5}$ & √ $\frac{27}{5}$, mais non pas √ 2 & √ 6, car leur quotient majeur √ 3 est inexpliquable en nombre vulgaire, ou bien leur moindre quotient √ $\frac{1}{3}$ est aussi inexpliquable; Or si l'un quotient est expliquable, aussi sera l'autre; si non, l'autre ne le sera non plus.

I I.

Recognoistre lequel est le majeur de deux nombres proposez.

NOtez qu'on appelle *un nombre* tant les radicaux simples, comme est √ 2, ou √ 5071, que les multinomes, comme les binomes 2+ √ 5,

item $7 - \sqrt{48}$, item $\sqrt{26} - 5$, comme les trinomes $4 + \sqrt{2} - \sqrt{17}$, & autres multinomes, car ce qui est lié par les signes soit + soit — ne font qu'un nombre.

Soyent donnez	$4 + \sqrt{2}$	& $\sqrt{29}$
ostons $\sqrt{2}$ de chacun, restera	4	& $\sqrt{29} - \sqrt{2}$
leurs quarrez	16	$31 - \sqrt{232}$
adjoustons $\sqrt{232}$ & ostons 16, viendra	$\sqrt{232}$	15
leurs quarrez	232	225

Et puis que 232 est majeur à 225, je conclud que $4 + \sqrt{2}$ sera majeur à $\sqrt{29}$, car qui à chose inesgale adjouste chose esgale, ou oste chose esgale, le majeur demeure tousiours le majeur, & le moindre le moindre.

De mesme 2 sera trouvé estre moindre que $\sqrt{3} + \sqrt{}$ bin. $7 - \sqrt{47}$. Car ostez de part & d'autre $\sqrt{3}$; alors d'un costé restera $2 - \sqrt{3}$, & de l'autre $\sqrt{(7 - \sqrt{47})}$, leurs quarrez seront $7 - \sqrt{48}$, & $7 - \sqrt{47}$; or $7 - \sqrt{48}$ est moindre que $7 - \sqrt{47}$; donc &c.

III.

Tout quotient + 1 multiplié par le diviseur, le produit sera esgal à la somme du dividende & diviseur, mais tout quotient — 1 multiplié par le diviseur, le produit est esgal à l'excez du dividende sur le diviseur.

Soit 20 le dividende, & 2 le diviseur, alors le quotient + 1 sera 11, lequel multiplié par le diviseur 2, le produit sera 22, esgal à la somme de 20 & 2.

Mais le quotient moins 1 sera 9, lequel multiplié par le diviseur 2, le produit 18 sera esgal à l'excez de 20 sur 2.

IIII.

Les choses heterogenes, ou de diverse nature, ne se doivent mesler; ainsi le bois & le fer ne se meslent pas, en la geometrie les lignes avec les superfices n'entrent point en comparaison, aussi en nombre (& non pas en geometrie) les nombres incommensurables ne se peuvēt mesler, ny par addition, ny soubstraction; car adjoustez 2 avec $\sqrt{3}$ viendra $2 + \sqrt{3}$; ostez $\sqrt{3}$ de 2, restera $2 - \sqrt{3}$: c'est quasi comme qui diroit, adjoustez 2 francs avec 3 sols, il ne faut pas dire 2 & 3 font 5, mais bien la somme

sera

sera 2 francs & 3 sols, &c. il y a bien des choses diverses qui se peuvent adjouster, comme qui adjousteroit 5 hommes, 3 femmes, & 4 enfans, on pourra dire que la somme est 12 personnes : De mesme 6 bœufs, 8 moutons, & 2 chameaux, sont 16 animaux ; car alors il faut donner à la somme un nom du genre plus pres qui comprend telles especes, mais icy nous ne pouvons dire que ce soyent choses heterogenes, car 2 & $\sqrt{5}$ peuvent estre dits de choses homogenes, comme ligne & ligne ; ou angle & angle, &c. mais il y a cela seulement que les nombres sont incommensurables.

Addition des Radicaux.

I. Des Incommensurables.

SOyent $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$ radicaux, lesquels pource qu'ils sont incommensurables, leur somme sera $\sqrt{2} + \sqrt{3}$: de mesme 5 & $\sqrt{7}$, font ensemble $5 + \sqrt{7}$.

II. Des Commensurables.

Soyent $\sqrt{2}$ & $\sqrt{18}$ Radicaux a adjouster.

$\sqrt{18}$ | $\sqrt{9}$, ou bien 3
$\sqrt{2}$ |
$+1$
4, ou bien $\sqrt{16}$
$\sqrt{2}$
$\sqrt{32}$ pour la somme requise.

De mesme $\sqrt{3}$ & $\sqrt{48}$ feront ensemble $\sqrt{75}$: aussi $\sqrt{7}$ & $\sqrt{7}$ feront $\sqrt{28}$, item $\sqrt{5}$ & $\sqrt{5}$, & $\sqrt{5}$ feront $\sqrt{45}$: car on pourroit faire ceste addition en multipliant $\sqrt{5}$ par 3 (qui est $\sqrt{9}$) & viendra $\sqrt{45}$, comme dit est.

Adjoustez $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$: leur quotient sera $\sqrt{\frac{18}{8}}$, ou $\sqrt{\frac{9}{4}}$, qui s'explique $\frac{3}{2}$, auquel adjousté 1, viendra $\frac{5}{2}$, qui vaut $\sqrt{\frac{25}{4}}$, lequel multiplié par le diviseur $\sqrt{8}$, viendra $\sqrt{50}$, pour la somme requise : de mesme adjoustez $\sqrt{1\frac{3}{7}}$, & $\sqrt{5\frac{5}{7}}$, viendra $\sqrt{12\frac{6}{7}}$. Mais quand on voudra eviter telles fractions, on pourra suivre ceste regle de la 4e proposition du deuxiesme des Elemens d'Euclides.

Soit

Soit a adjouster $\sqrt{18}$ & $\sqrt{8}$.

Leur double produit est	24
La somme de leurs quarrez	26
font	50
la $\sqrt{}$ est	$\sqrt{50}$ pour la somme requise.

Soubstraction des Radicaux.

I. Des Incommensurables.

OStez $\sqrt{3}$ de $\sqrt{6}$, restera $\sqrt{6} - \sqrt{3}$: ostez 2 de $\sqrt{5}$, restera $\sqrt{5} - 2$: que si on disoit, ostez 7 de $\sqrt{48}$, il seroit impossible: car $\sqrt{48}$ est moins que 7, toutesfois la solution est $\sqrt{48} - 7$.

II. Des Commensurables.

QVand les radicaux sont commensurables, il faut faire comme en l'addition, horsmis que là on adjouste l'unité, & icy il en faut oster l'unité.

Ostez $\sqrt{10}$ de $\sqrt{90}$: divisez premierement le grand par le moindre.

$\sqrt{90}$ | quotient $\sqrt{9}$, ou bien 3
$\sqrt{10}$ |

— 1

2 qui vaut $\sqrt{4}$

$\sqrt{10}$

$\sqrt{40}$ pour le residu requis.

Item ostez $\sqrt{8}$ de $\sqrt{50}$: leur quotient est $\sqrt{\frac{50}{8}}$, ou $\sqrt{\frac{25}{4}}$, qui vaut $\frac{5}{2}$, ostez en l'unité restera $\frac{3}{2}$, qui vaut $\sqrt{\frac{9}{4}}$, lequel multiplié par le diviseur $\sqrt{8}$, viendra $\sqrt{18}$ pour le residu requis; de mesme ostez $\sqrt{1\frac{3}{7}}$ de $\sqrt{12\frac{6}{7}}$, restera $\sqrt{5\frac{5}{7}}$. Pour eviter les fractions on fera comme s'ensuit: pour oster $\sqrt{8}$ de $\sqrt{18}$. la somme des quarrez 26, leur double produit 24, reste 2, sa $\sqrt{2}$, pour le reste requis.

Et à fin de donner matiere d'exercice aux apprentifs, je mettray la Table suivante seulement pour l'addition, car qui sçaura l'addition, entendra aussi bien la soubstraction.

adjoustez

adjoustez	avec	faict
2	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$3-\sqrt{2}$	$\sqrt{18}$	$3+\sqrt{8}$
$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{27}-\sqrt{20}$	$\sqrt{48}-\sqrt{5}$
$\sqrt{(2+\sqrt{3})}$	$\sqrt{(50+\sqrt{1875})}$	$\sqrt{(72+\sqrt{3888})}$
$\sqrt{(2+\sqrt{7})}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{10}+\sqrt{(2+\sqrt{7})}$
$\sqrt[3]{16}$	$\sqrt[3]{54}$	$\sqrt[3]{250}$
$\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})}$	$\sqrt[3]{(54+\sqrt{1458})}$	$\sqrt[3]{(128+\sqrt{8192})}$

Touchant la division des multinomes radicaux, soit à diviser $35+\sqrt{588}$ par $5+\sqrt{12}$: on les disposera comme il faut, le diviseur sous le dividende; disant combien de 5 en 35, il y a 7 fois; donc 7 fois sont 35, de 35 reste rien; puis 7 fois $\sqrt{12}$ est $\sqrt{588}$, de $\sqrt{588}$ reste rien: ainsi que le quotient est 7: mais quand la division ne succede pas sans rester, comme si on veut diviser $30+\sqrt{720}$ par $3+\sqrt{5}$, en faisant comme devant, combien de 3 en 30? il y a 10 fois; donc 10 fois 3 sont 30, de 30 reste rien; puis 10 fois $\sqrt{5}$ font $\sqrt{500}$, lesquels ostez de $\sqrt{720}$, reste $\sqrt{20}$ [il ne faut estre esmerveillé qu'ostant $\sqrt{500}$ de $\sqrt{720}$, il ne reste que $\sqrt{20}$, car voyez la soubstraction cy devant] donc le quotient seroit $10\,\frac{\sqrt{20}}{3+\sqrt{5}}$ que si on amplifie la fraction par $3-\sqrt{5}$ (binome disjoinct correspondant au nominateur conjoint) on aura $10+\sqrt{11\frac{1}{4}}-2\frac{1}{2}$ c'est $7\frac{1}{2}+\sqrt{11\frac{1}{4}}$ pour le quotient requis.

Autrement on pouvoit d'abord amplifier les nombres donnez (car on les peut amplifier ou abreger comme on voudra, comme les nottes des rompus) par un nombre qui correspond au diviseur, comme icy par $3-\sqrt{5}$, à fin que le diviseur soit simple nom, alors on aura $30+\sqrt{180}$ à diviser par 4 (au lieu de $30+\sqrt{720}$ par $3+\sqrt{5}$) viendra comme devant: & ainsi des autres.

Divisez	par	viendra
$\sqrt{8}+\sqrt{6}$	$2+\sqrt{2}$	$\sqrt{8}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3}$
18	$4+\sqrt{7}$	$8-\sqrt{28}$
$\sqrt{8}+\sqrt{6}$	$\sqrt{8}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{2}$
$10+\sqrt{8}$	$2+\sqrt{2}$	$8-\sqrt{18}$
$\sqrt{72}+\sqrt{12}$	$\sqrt{6}+\sqrt{3}$	$\sqrt{48}+\sqrt{8}-\sqrt{24}-2$
$\sqrt{32}+\sqrt{27}+5+\sqrt{6}$	$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$3+\sqrt{2}$

Soit à diviser $\sqrt{32}+\sqrt{27}+5+\sqrt{6}$ par $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$: multipliez l'un & l'autre par le correspondant trinomie du diviseur qui est $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ou $-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ou $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ (tellement que ce soit quelque cho-

se n'importe, or $-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1$ est moins que rien, toutesfois on ne delaisseroit d'en venir à bout, car multipliant l'un & l'autre on aura $-12-\sqrt{32}-\sqrt{48}-\sqrt{24}-\sqrt{96}$ & diviseur $-4-\sqrt{24}$ lesquels autrefois multipliez par le correspondant du diviseur $-4+\sqrt{24}$, on aura un simple diviseur: mais quand il est possible comme icy, j'aymerois mieux prendre $1+\sqrt{2}-\sqrt{8}$, pour amplifier les donnez, car de premier abord j'auray un nombre simple pour diviseur assavoir $\sqrt{8}$, & pour dividende $4+\sqrt{72}$, donc le quotient sera $\sqrt{2}+8$: notez que quand on multiplie $\sqrt{32}+\sqrt{27}+5+\sqrt{6}$ par $1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, alors il y a trois nombres communs $8+5-9$, qui valent 4; & puis $\sqrt{27}+\sqrt{12}-\sqrt{75}$, qui n'est rien, non plus que $\sqrt{54}+\sqrt{6}-\sqrt{96}$, mais $\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{18}$, vaut $\sqrt{72}$, comme en l'addition & soubstraction precedente.

Notez aussi que plusieurs trinomes se peuvent multiplier par des nombres facils a trouver, ainsi que leur produit soit nombre simple: comme quand le quarré de l'un est esgal aux quarrez des deux autres, exemple $\sqrt{2}+3+\sqrt{11}$, icy le quarré de 11 est esgal aux quarrez de $\sqrt{2}$ & de 3, iceluy $\sqrt{11}$ ayant d'un costé plus on prendra un moins s'il est possible, autrement on changera les deux autres comme icy.

	$\sqrt{2}+3+\sqrt{11}$		$5-\sqrt{2}+\sqrt{27}$
	$\sqrt{2}+3-\sqrt{11}$		$-5+\sqrt{2}+\sqrt{27}$
produit	$\sqrt{72}$	produit	$\sqrt{200}$

Car alors le produit, est le double produit des deux moindres nombres. aucune fois il y a un quadrinome, & trinome qui produisent un simple nombre, comme $\sqrt{80}+\sqrt{108}-\sqrt{150}-\sqrt{10}$, & $8+\sqrt{5}+\sqrt{10}$, car leur produit est 28 seulement; puis que $20+18-10$ est 28: & $\sqrt{800}-\sqrt{450}-\sqrt{50}$ n'est rien, ny non plus $\sqrt{540}+\sqrt{240}-\sqrt{150}$, ny aussi $\sqrt{1080}-\sqrt{750}-\sqrt{80}$.

De l'extraction des Racines des multinomes Radicaux.

Et premierement de l'extraction de la racine quarree des binomes.

TOut ainsi qu'à l'extraction de la racine quarrée des nombres on pourroit dire que la racine quarrée de 25 est $\sqrt{25}$, mais à cause qu'on la peut expliquer quelquefois comme icy 5, & aucunefois non justement, comme la racine quarrée de 3 est $\sqrt{3}$, ainsi aussi és binomes la racine

cine quarrée de $7+\sqrt{48}$, est $\sqrt{(7+\sqrt{48})}$ mais on la peut expliquer plus brievement, assavoir $2+\sqrt{3}$; & aucunefois non pas si clairement comme racine quarrée de $3+\sqrt{7}$, est $\sqrt{(3+\sqrt{7})}$ or Euclides descrit 6 especes de binomes conjoincts par $+$ comme dessus, & 6 binomes disjoincts par $-$: dont les trois premiers tant des conjoincts que disjoincts, reçoivent racine.

Regle generale pour extraire la $\sqrt{}$ des binomes.

Soit donné $7+\sqrt{48}$ il faut trouver sa racine.

quarrez des noms	$\begin{cases}49\\48\end{cases}$
difference	1
sa racine quarrée	1
Conjuguée avec le majeur nom	7
Donne somme, & difference,	8 & 6
Les moitiez	4 & 3
La $\sqrt{}$ de chacun est	2 & $\sqrt{3}$

Lesquels liez avec le mesme signe donné $2+\sqrt{3}$ sera la racine requise. Tellement que la $\sqrt{}$ du binome disjoinct $7-\sqrt{48}$ sera $2-\sqrt{3}$, & ainsi des autres: comme la $\sqrt{}$ du binome conjoinct $6+\sqrt{32}$ sera $2+\sqrt{32}$: item la racine quarrée du binome $\sqrt{18}+4$ sera $\sqrt{\sqrt{8}}+\sqrt{\sqrt{2}}$: finalement la racine quarrée de $\sqrt{80}+\sqrt{60}$ est $\sqrt{\sqrt{45}}+\sqrt{\sqrt{5}}$.

Mais de ceux lesquels on ne peut pas reüssir comme dessus sans commettre petition de principe on fera comme s'ensuit: la racine quarrée de $5+\sqrt{12}$, c'est $\sqrt{}$ binomie $5+\sqrt{12}$, ou ainsi marqué $\sqrt{(5+\sqrt{12})}$ que si on se veut servir de la reigle precedente, en commettant la petition de principe, on dira que c'est,

$$\sqrt{(2\tfrac{1}{2}+\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}+\sqrt{(2\tfrac{1}{2}-\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}$$

lequel vaut autant que $\sqrt{(5+\sqrt{12})}$

Semblablement $\sqrt{(5-\sqrt{12})}$ vaudra $\sqrt{(2\tfrac{1}{2}+\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}-\sqrt{(2\tfrac{1}{2}-\sqrt{3\tfrac{1}{4}})}$

Touchant donc la racine des binomes, il faut sçavoir, comme il a esté dit, qu'il n'y en a que de trois sortes, desquelles on puisse proprement extraire la racine, (j'appelle binome tant conjoint par $+$ que disjoint par $-$, & ce qui se dit de l'un se peut entendre de l'autre:) assavoir binome premier, second & troisiesme; mais des 4, 5, & 6[e] binomes, on ne peut pas l'extraire sans plus grand inconvenient.

Or la racine de binome premier, est binome.

$\sqrt{}$ de binome deuxiesme est bimedialle premiere.

$\sqrt{}$ de binome troisiesme est bimedialle seconde.

Voila tout, il est vray que des six, qu'Euclide appelle Binome, bimedialle tant premiere que seconde, Ligne majeure. Ligne pouvant un rationel & un medial, & finalement de la ligne pouvant deux mediaux: le quarré-quarré d'une chacune est binome premier: & ainsi des residus ou disjoints.

Le binome premier multiplié par un nombre absolu ou commun fera un binome premier: comme $3+\sqrt{5}$ par 2, fait $6+\sqrt{20}$.

Le binome premier multiplié par un simple radical, tel que le moindre nom du produit soit absolu, ledit produit sera binome deuxiesme, comme $3+\sqrt{5}$ multiplié par $\sqrt{20}$, viendra $\sqrt{180}+10$ binome second.

Le binome premier multiplié par un simple radical, tel que le moindre nom soit encor radical (c'est à dire tous deux) ledit produit sera binome troisiesme: comme $3+\sqrt{5}$ par $\sqrt{3}$, viendra $\sqrt{27}+\sqrt{15}$ binome troisiesme.

Or binome premier, est lors que le majeur nom est absolu, & la difference des quarrez des deux noms est aussi quarré: comme $5+\sqrt{21}$ est binome premier, la difference des quarrez 25 & 21 est 4, qui est aussi quarré.

La ligne majeure est admirable en cela, que le majeur nom est aussi une ligne majeur, & le moindre nom est une ligne appellée mineur, & ainsi à l'infiny: de mesme de la mineur.

Finalement la racine quarrée des multinomes se pourra faire suyvant la maniere dont les autres autheurs se sont servy; ce que j'eusse mis icy, n'eust esté pour eviter prolixité, & aussi pource que je n'ay rien cerché de commode là dessus, n'y rien d'extraordinaire, seulement ay escrit une reigle à l'extraction Cubique, des binomes Cubes, comme s'ensuit: car n'estant Cubes, ils n'auront nulle autre solution, que par la petition de principe, mettant une marque devant, que la racine Cubicqne s'en doit extraire: faut noter en passant que personne n'en a donné de meilleure, celle de Raphael Bombelle ne vaut rien.

Reigle servant à l'extraction de la racine Cubicque des binomes.

L'Extraction Cubicque des binomes n'estant encor inventée de personne, on se pourra servir de la reigle suyvante.

Soit

Soit à extraire la CC de 72 + √5120.

quarrez des noms { 5184, 5120

difference 64

dont la racine Cubicque 4

Ce 4 monstre que les quarrez des noms requis different de 4; & que l'absolu 72 estant nom majeur, qu'aussi en la racine requise le majeur nom sera absolu: D'avantage les majeurs noms sont commensurables, aussi les mineurs de la puissance & racine.

2 + √ 0	Donc ayant fait une table comme icy à costé, où les quarrez
3 + √ 5	des absolus excedent les quarrez des radicaux en 4 (assavoir
4 + √ 20	4 susmentionné) on doit estre certain que le binome requis
5 + √ 29	sera dans icelle table, si non, la racine Cubicque requise ne se
&c.	pourra exprimer qu'ainsi CC (72 + √5120).

Et pour cognoistre si la table est assez prolongée, il faut voir si le majeur nom du dernier binome 5, est plus que racine Cubicque du majeur nom donné 72 (ou bien si √ 29 est plus que CC √5120) ce qu'estant ainsi cela me certifiera en avoir assez.

Parquoy pour venir à l'inquisition de la racine Cubicque, voicy comment: je considere quel nombre c'est, qui entre les noms majeurs, mesure le majeur nom donné, & en remarque plusieurs comme le 2, le 3, & le 4, je fais de mesme avec les moindres noms & trouve √ 5 aussi √ 20, & qui plus est commensurables, au donné √ 5120: mais puis que √ 20 est plus que la racine Cubicque du donné √ 5120, il ne vaudra rien, & conclud que 3 + √5 sera la racine Cubicque requise de 72 + √5120; laquelle racine Cubicque doit avoir le mesme signe que sa puissance; assavoir la racine aussi bien que la puissance, selon + ou —: (Notez que cest A, 4 est tousjours le $\frac{1}{3}$ du nombre des (1), de l'equation qui estoit l'origine de ceste question Cubicque) Mais pour en estre plus certain, il la faudra faire passer ceste espreuve.

B C

3 + √5

Quarré de B	9
triple quarré de C	15
somme	24
lequel multiplié par B	3
viendra	72 qui doit estre l'un des deux noms correspon-

dant à B premierement pris. 3 C Secon-

Seconde preuve.

Quarré de C	$\sqrt{}$ 5
triple quarré de B	27
somme	32
lequel multiplié par C	$\sqrt{}$ 5
viendra	$\sqrt{}$5120 qui doit estre l'autre nom correspondant à C.

Ceste preuve est plus facile que de Cuber la racine trouvée: elle est tirée de la suyvante figure.

Soit un binome conjoint B + C.
Son Cube sera B (B q + C $^{3}_{q}$) + C (B$^{3}_{q}$ + C q)

Soit un binome disjoint B — C
Soit Cube sera B (B q + C$^{3}_{q}$) — C (B$^{3}_{q}$ + C q)

Tellement que le majeur nom de la puissance est commensurable au majeur nom de la racine, & aussi le mineur au mineur (si la racine n'est enveloppée d'autre marque plus esloignée que $\sqrt{}$.)

Notez que le quarré de la diagonale d'un cube, est triple au quarré du costé d'iceluy.

Construction Algebraïque sur les Questions.

ON y procede le plus souvent comme aux fausses positions; lors qu'il faut adjouster ou soubstraire, on mesle les homogenes, assavoir les (1) avec les (1): les (2) avec les (2), &c. mais les heterogenes (comme les (0) avec les (1) ou autres, ou bien les (1) avec les (2), ou autres plus hautes) par + & —. Quant à la multiplication on n'observe pas les homogenes, on adjouste les caracteres comme en la Disme, de mesme pour la Division, horsmis qu'on soubstrait le caractere du diviseur de celuy du dividende, le reste, pour celuy du quotient. Multipliez 4(1) + 2 par 8 (2) — 4 (1) + 2 viendra 32(3) + 4, au produit: Divisez le produit par l'un des efficients il viendra l'autre: on doit bien entendre les fractions de l'Arithmetique commune. Quant aux extractions on fait de mesme qu'aux entiers, sinon que l'on n'extrait les racines que des puissances parfaictement quarrées ou Cubes, &c. autrement on se contente de l'apposition au devant. On posera donc (pour suivre les fausses positions) 1 (1) pour le commencement, ou 1 (2): mais on doit avoir esgard qu'en se reiglant

glant selon les conditions, qu'en procedant on n'admette des quantitez ou des nombres rompus: ce qui sert à la facilité: On tasche aussi d'eviter de parvenir à la fin, a des equations complettes (voyez la troisiesme definition cy apres.) Pour donc resoudre une question, il la faut remettre en question de nombres abstracts, sans parler (si on peut) de matiere, comme d'escus, pieds, &c. Finalement il y a la position, les conditions (dont la derniere fait l'equation si la question n'est defaillante) la reduction, puis la solution de l'equation ordonnée: voyez les questions de Diophante, reduites en six livres, dans l'Arithmetique de Stevin, qu'avons fait depuis peu r'imprimer, en l'an 1625, avec quelques augmentations, corrections & explications.

De la reduction Algebraïque.

IE parleray de la reduction fort briefvement, comme chose assez amplement descrite par Stevin, en dix reigles, apres le soixante cinquiesme probleme de son Arithmetique, page 250e de la nouvelle edition. Et pour dire la verité j'eusse bien deu rameliorer plusieurs choses là mesme, ce que j'aurois fait, n'eust esté que mes occupations ordinaires ne m'en donnoyent le loisir, comme entre autre choses, en sa quatriesme reigle des reductions, il falloit dire que la superieure quantité doit estre seule, avec le signe +, devant les autres, avec le nombre 1, principalement si cela se peut faire commodement sans les fractions, & que les autres soyent mises par ordre selon leurs quantitez.

Mais puis que cest ordre là n'est pas seul, & qu'il y en a d'autres, comme l'inferieure quantité, (ou bien le nombre absolu seul au consequent, pour separer le cogneu d'avec l'incogneu) & aussi l'ordre alternatif, comme on verra en la definition dixiesme suivante, qui est nouveau, propre pour quelque chose de particulier: il faut sçavoir que les reductions reçoivēt encor d'autres reigles qu'il n'en escrit, comme il le dit aussi à la fin. Pour n'estre pas long je mettray icy quelques briefves reigles en general.

l'Addition Et la soubstraction	sert contre	le desordre, redondance & defaut.
La multiplication		les fractions, des nombres, ou quantitez en general.
La division		les grands nombres, aussi des quantitez.
La puissance		l'Asymetrie, & trop grande depression.
l'Extraction		les Exaltations excessives des quantitez.
l'Isomere		l'intemperance des nombres seulement.

Item

Item és postposées quantitez, on fait la reduction (s'il y a equation) pour eviter la pluralité des postpositions, & aussi l'on met seule celle-la qu'on veut quitter; & finalement les Equations servent a se defaire de toutes les positions, tant preposition que postpositions.

I'eusse donné des exemples des reigles susmentionnées, mais estant assez communes, je ne parleray que de l'Isomere comme s'ensuit.

De l'Isomere.

L'Isomere est contre l'intemperance des nombres seulement, & non pas des quantitez; les valeurs varient, on opere non pas seulement par multiplication pour se despestrer des fractions, mais aussi par division pour s'affranchir des grands nombres: or tout se fait avec des nombres continuellement proportionnaux.

Premierement contre les fractions.

Soit 1 (3) esgale à $1\frac{1}{2}$(1)+5: Il faut mettre toutes les quantitez obmises comme icy les (2)

assavoir 1(3) esgale à 0(2)+$1\frac{1}{2}$(1)+5, posez les proportionnaux dessous ainsi. 1. 2. 4. 8.

produits 1(3) esgale à 6 (1)+40 la valeur de 1(1) estant trouvée 4, il faudra le multiplier par $\frac{1}{2}$ (qui sont premier & deuxiesme termes des nombres proportionnaux cy dessus) viendra 2 pour la valeur de 1(1) de l'equation proposée premierement.

Secondement contre les grands nombres.

Soit 9(2) esgale à 72(1)+1456. Divisez par nombres

proport. 9 . 12 . 16

quotients 1(2) esgale à 6(1)+91 là où 1(1) vaut 13 &—7 lesquelles solutions divisez (car on a divisé par les nombres proportio.) par $\frac{9}{12}$ qui est la raison cy dessus, ou $\frac{3}{4}$ viendra $17\frac{1}{3}$ encor —$9\frac{1}{3}$, pour les solutions requises.

Tierce-

Tiercement contre l'Assymetrie.

Soit 1 (3) esgale à 14 (1)—$\sqrt{288}$; il y a defaut des (2) qu'il faut premierement remettre

ainsi	1 (3) esgale à 0 (2) + 14 (1) — $\sqrt{288}$
diviseurs prop.	1. $\sqrt{2}$. 2. $\sqrt{8}$.
quotients	1 (3) esgale à 7 (1) — 6

dont la valeur de 1 (1) vaut $\begin{cases} 1 \\ 2 \\ -3 \end{cases}$

lesquels divisez par la raison cy dessus de $\frac{1}{\sqrt{2}}$

viendra pour les valeurs requises de l'equation proposée. $\begin{cases} \sqrt{2} \\ \sqrt{8} \\ -\sqrt{18} \end{cases}$

Des Equations ordonnées.

LEs conditions, d'une proposition, achevées, on vient à une equation, que s'il n'y a pas assez de conditions pour amener le tout à l'equation, & que les nombres Algebraiques ayent en eux les proprietez & conditions requises, alors la question sera defaillante, & recevra autant de solutions qu'on voudra, si l'on admet les moins; que si l'on n'admet les nullitez, & les moins, elle sera tant plus restrainte, & faut limiter & determiner les solutions, & ce par le moyen des moins, qui se trouvent illec, autrement s'il ny a des moins, il ny aura pas de restriction ou determinaison.

Que si on peut resoudre la proposition sans se servir de toutes les conditions, elle sera excedente, & faut retrencher la derniere condition, si elle repugne: Que si finalement la proposition peut faire parvenir à une equation, la proposition sera pleine & entiere; mais si l'equation est desordonnée, prolixe, & vitiée, il la faut preparer par la reduction, & l'ayant polie, l'appeller equation ordonnée, de laquelle nous avons à parler: & est preste à recevoir la derniere main.

L'equation ordonnée n'est rien, si on ne la resoud, & est le nœud principal de la question, & pour n'estendre ce discours hors des limites, parlons de la premiere, pour la delaisser doresnavant.

Quand les (2) *sont esgales à* (1) (0)

Par exemple soit 5 (2) esgale à 18 (1) + 72.

la moitié du nombre des (1) est	+ 9
son quarré	+ 81
auquel adjousté le produit de 5 fois + 72 qui est	+ 360
la somme	+ 441
sa √ est	+ 21
lequel adjousté, & osté du premier en l'ordre viendra	{ 30 / — 12

Chacun desquels divisé par le 5 viendra 6 aussi — $\frac{12}{5}$ valeurs de 1 (1)

Et ainsi faut-il faire des autres deux accidens de ceste premiere equation : Notez aussi, que la racine de 441 est + 21 aussi — 21 ; mais au lieu de ceste difficulté, là on fera une addition & soubstraction, ou se trouvent 30, ou — 12, autrement on n'eust eu besoin que d'adjouster.

Notez aussi qu'où les (0) sont moins, il y a plus de solutions par + qu'autrement, & ce en toutes les equations : Or les solutions par — ne se doivent obmettre.

Finalement quand quelques (2) sont esgales à (1) — (0), il se peut faire que l'equation seroit impossible, comme si 1 (2) estoit esgale à 6 (1) — 25, alors la valeur de 1 (1) seroit inexpliquable, assavoir $3 + \sqrt{-16}$ ou $3 - \sqrt{-16}$, ce qui peut arriver seulement aux equations là où le (0) est —, & qui sont ambigues, c'est à dire qui reçoivent plus d'une solution par + : & ainsi s'entendra des autres equations.

Quant à l'ambiguité des equations, on choisit la solution le plus commode, si on ne les veut accepter toutes.

On doit aussi recercher toutes les solutions, pource qu'elles donnent plus d'intelligence de ce qu'on cerche, car par exemple ; si 1 (2) est esgale à 16 (1) — 28 ; on en peut faire une question, disant : il y a deux nombres dont la somme est 16, & leur produit 28 : (la maniere & la raison que cest une telle question, se verra cy apres) ceux-là seront 2 & 14, & chacun est la valeur de 1 (1), & n'en y a pas d'avantage.

Quand 1 (3) *est esgale à* (1) & (0)

Icy se trouvent les autheurs fort empeschez, & pour dire la verité en chose fort difficile, & pour ne faire trop de discours entrons en la maniere ordinaire restituée. Soit

Soit 1 (3) esgale à 6 (1) + 40

le $\frac{1}{3}$ du 6 est 2	$\frac{1}{2}$ est 20
son cube 8	son □ est 400
	ostez 8
	392
	sa √ est √ 392

lequel adjousté à 20 & soubstraict de 20, viendra $\begin{cases} 20 + \sqrt{392} \\ 20 - \sqrt{392} \end{cases}$

la racine cubicque de chacun est $\begin{cases} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{cases}$

la somme est 4 pour la valeur de 1 (1)

Voila donc la valeur de 1 (1) en perfection, or tout ainsi comme il y a des binomes comme les 4e, 5e & 6e, desquels on ne peut extraire la racine quarrée qu'en posant devant la marque √ bino. comme il a esté dit cy dessus, aussi y a-il des binomes desquels on ne peut autrement extraire la racine cubicque qu'en apposant une marque & enseigne au devant, comme Cl bino. sans qu'il y ait de l'imperfection en cela, non plus qu'à la racine de 5, donnant pour solution √ 5.

Or la racine cubicque d'un binome estant extraicte, comme nous en avons donné une reigle cy dessus, il s'ensuit de là, qu'on pourra tousjours resoudre ceste equation, horsmis là où on ne pourra oster le Cube du tiers du nombre des (1), du quarré de la moitié des (0), & quand cela arrivera, on fera comme s'ensuit.

Reigle pour resoudre l'equation de 1 (3) esgale à (1) + (0) lors que le cube du tiers du nombre de (1) est majeur au quarré de la moitié des (0) par l'aide des tables de Sinus.

Soit 1 (3) esgale à 13 (1) + 12

Le tiers du nombre des (1) est 4$\frac{1}{3}$	la moitié du (0) est 6
sa √ est en disme ☞ 20816 (4)	le raid 100000
leur produit est 9,0203 (4), diviseur	leur produit 600000, dividende

D 2 Or

Or ayant ainsi un dividende & diviseur, on aura un quotient 66515

		′ ″
Sinus de	41 deg.	41. 37.
adjoustez y par reigle	180	
somme	221.	41. 37
son tiers	73.	53. 52
son sinus	96078	
son double	192156	
multiplié par √	20816 (4)	
viendra	400000	

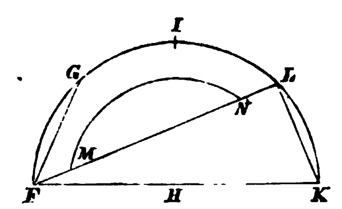
lequel divisé par le raid 100000
viendra 4 la valeur de 1 (1) principale

Car il y a encor deux valeurs qui sont chacune faite par —; parquoy appliquant (1) à la valeur trouvée 4, & ledit divisant l'(0) donné 12: viendra 3, donnant le signe — à chacun, puis par reigle

1 (2) esgale à — 4 (1) — 3
les valeurs seront — 1 & — 3

Donc les 3 valeurs requises seront { 4, — 3, — 1 }

Le mesme en Geometrie de facile expedition.



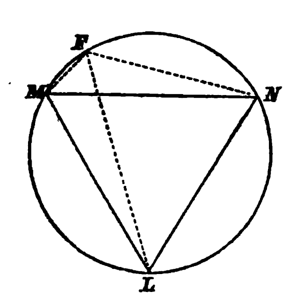
Cy dessus 1 (3) estoit esgale à 13 (1) + 12 Le $\frac{1}{3}$ du 13 est $4\frac{1}{3}$, entre iceluy & l'unité soit trouvé une moyenne proportionnelle FH, icelle comme raid soit fait un demicercle, Or ledit $4\frac{1}{3}$ divisant le 12 donné, viendra $2\frac{10}{13}$, qui sera tousjours moindre au diametre de necessité, en l'accident present selon le tiltre de ceste equation: soit dont F G adaptée esgale à $2\frac{10}{13}$, puis soit trouvé geometriquement par le moyen de l'hyperbole le tiers de l'arc G K, ou bien mechaniquement avec le compas, (car il est impossible de coupper tout arc proposé en 3, sans user d'autres lignes que la droite & circulaire) & soit LK, puis de l'intervalle de la droite LK, comme raid, soit fait l'arc MN homocentrique,

trique, couppant la ligne F L en M, N, alors les trois valeurs de la 1 (1)

$$\text{seront}\begin{cases} FL \\ -FN \\ -FM \end{cases}$$

Notez, que si on eust proposé 1 (3) esgale à 13 (1) — 12, les trois valeurs eussent esté les mesmes, apres avoir changé les signes, assavoir

$$\begin{cases} -FL \\ FN \\ FM \end{cases}$$



On eust peu faire dans le cercle entier, apres avoir trouvé F L comme dessus, un triangle equilateral commençant en L ou à F, comme icy en L, puis de l'autre extremité F mener F M & F N, qui devront estre esgales aux F M, F N precedentes; aussi M N se trouveroit estre esgale à $\sqrt{13}$ (des 13 (1) données.)

Ceste equation donc qu'on n'a peu faire jusques à present est en Algebre litterale.

A cube esgal à (Bq + B C + C q) A + B C (B + C) par l'aide de laquelle je l'avois bien resoute par deux ou trois manieres sans les Tables de Sinus; mais la maniere generale qui suivra en son lieu est à preferer: or icy A vaut B + C, ou — B, ou — C.

Quand 1 (3) *esgale à* (1) — (0)

Les Autheurs ne pouvoyent faire celle-cy non plus, puis qu'ils la renvoyoyent à la precedente, sans recognoistre qu'elle ne pouvoit estre rapportée à icelle en general, veu qu'ils n'avoyent pas fait la determinaison de la presente comme s'ensuit.

Determinaison: *Il faut icy que le cube du $\frac{1}{3}$ du nombre des* (1) *ne soit moindre au quarré de la moitié du* (0), *autrement l'equation est absurde & inepte.*

Lequel accident a esté tousjours ignoré, & sa determinaison, puis qu'il estoit fondé sur une chose incogneuë.

Icy il faut seulement changer le — en +, & la resoudre par la precedente; & ayant les trois solutions, il les faut oster de 0, alors on

D 3 aura

aura les trois solutions requises, car icy il a deux solutions, chacune plus que rien, & l'autre moins que rien, c'est à dire —.

Exemple si 1 (3) est esgale à 30 (1) — 36; on changera le moins a part, ou aura par la precedente ostez les de 0, c'est changer les signes $\left\{\begin{array}{l} 6 \\ -3+\sqrt{3} \\ -3-\sqrt{3} \end{array}\right.$

viendra $\left\{\begin{array}{r} -\ 6 \\ 3-\sqrt{3} \\ 3+\sqrt{3} \end{array}\right|$ chacune est la valeur de 1 (1)

De mesme si 1 (3) est esgale à 12 (1) — 16, alors la 1 (1)

vaudra $\left\{\begin{array}{r} -4 \\ 2 \\ 2 \end{array}\right|$ & ainsi des autres

Mais si 1 (3) est esgale à 12 (1) — 17 (ou davantage que 17 comme 18, 19; &c.) alors l'equation est inepte & absurde, aussi bien que 1 (2) esgale à 6 (1) — 10 de laquelle equation la determinaison est aussi manifeste.

Quand 1 (3) *est esgale à* — (1) + (0)

Soit 1 (3) esgale à — 6 (1) + 20

tiers du — 6 est — 2	½ de 20 est 10
son cube, — 8	son quarré 100
	auquel adjousté — 8
	viendra 108
	sa √ est √ 108

lequel adjousté & soubstraict de 10 cy dessus

viendra $\left\{\begin{array}{l} 10+\sqrt{108} \\ 10-\sqrt{108} \end{array}\right.$

les racines cubicques de chacun $\left\{\begin{array}{l} 1+\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \end{array}\right.$

somme 2 valeur de 1 (1)

Il ne faut pas trouver estrange, que j'ay mis cy dessus des choses qui sont moins que rien, comme 10 — √108, sa ∁ est 1 — √3; cela est pour monstrer la generalité de l'anteprecedente.

Or quand cest que la valeur de 1 (1) sera asymmetre, on la pourra trouver par l'extraction de la racine cubicque deux fois comme les binomes le monstrent: Autrement voicy une petite reigle par le moyen des Tangentes & Sinus d'estrange & facile operation.

Soit

Soit 1 (3) esgale a — 24 (1) + 56

$\frac{56}{24}$ me donne le diametre 200000, combien √ 24, ou 4899 (3)? viendra 419885 A

Sinus 100000 prins a plaisir ou le plus pres du vray qu'on pourra.

somme 519885
½ est 259942

tangente de 68. 58
son double 137, 56
son Sinus 66999 au lieu de celuy a plaisir
A 419885

somme 486884
½ est 243442
Tangente de 67. 40
son double 135. 20

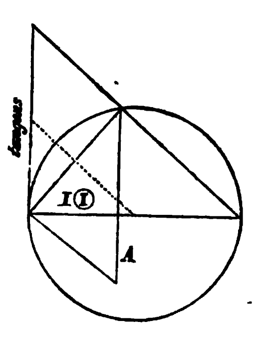
son Sinus 70298
A 419885

somme 490183
½ est 245091
Tangente de 67. 48
son double 135. 36

son Sinus 69966
A 419885

somme 489851
moitié 244925
Tangente de 67. 48

Ayant fait ceste circulation tant de fois que les Tangentes s'accordent, comme icy de 67.48
alors son double 135.36
son Sinus verse 171447
puis 200000 donne $\frac{56}{24}$ combien 171447
viendra 2 pour le valeur de 1 (1)



S'ensuit

S'ensuit encor une nouvelle maniere pour resoudre les susdites equations, sans autre distinction.

Soit 1 (2) esgale à 6 (1) + 40

Notes qu'és operations suivantes il faudra poser des nombres apariez, ainsi que leur produict soit le (0) (comme icy 40) qui fait que lors que la valeur de 1 (1) est nombre entier, qu'alors l'operation est souvent tres brieve & facile plus qu'en nulle sorte de reigle.

Divisons tout par 1 (1) viendra 1 (1) esgale à $6 + \frac{40}{1(1)}$: C'est a dire que 6 + une des parties aliquotes de 40; (si la solution est un nombre entier) sera la valeur de 1 (1).

2	20
4	10
5	8

efficients de 40.

Ayant fait une table comme icy a costé, adjoustez le 6 au 2, fait 8, ce qui n'accorde avec 20: Adjoustez le 6 avec le 4, fait 10, ce qui accorde avec le 10; donc 10 est la valeur de 1 (1). Et ainsi des autres telles equations, que je delaisse pour briefveté.

Soit 1 (3) *esgale à* 6 (1) + 40

Divisons tout par 1 (1)

1 (2) sera esgale à $6 + \frac{40}{1\,(1)}$

C'est à dire que 6 avec une partie aliquote de 40 sera le quarré de l'autre; cela trouvé, cest autre là sera la valeur de 1 (1): Or faisant une table comme cy dessus, la perquisition sera facile: & pour plus ample explication je la mettray comme s'ensuit.

Adjoustez 6 avec 2 cela n'est pas le quarré de 20.

Adjoustez 6 avec un chacun, on trouvera qu'à la fin adjousté à 10 sera le quarré de 4:

Donc 4 est la valeur de 1 (1).

Autre exemple qui a esté si difficil par le passé, voyez le probleme 69, *page* 287, *de l'Arithmetique de Stevin, de la nouvelle edition.*

Soit 1 (3) esgale à 30 (1) + 36

Divisons tout par 1 (1)

1 (2) sera esgale à $30 + \frac{36}{1\,(1)}$

efficients

efficients de 36

2	18	Adjoustez 30 à un chacun nombre, considerant si la somme est quarré de son opposé:
3	12	
4	9	Donc 30 adjousté à 6, fera le quarré de l'autre 6, & ainsi 1 (1) vaut 6.
6	6	

Autre exemple.

Soit 1 (3) esgale à — 6 (1) + 20

Divisons tout par 1 (1)

$$1\,(2) \text{ esgale à} - 6 + \frac{20}{1\,(1)}$$

efficients de 20

1	20	C'est à dire qu'un efficient moins 6 sera quarré de l'autre.
2	10	Donc 10 moins 6 (qui vaut 4) estant quarré de son opposé, alors 2 sera la valeur de 1 (1)
4	5	

Autre exemple, jadis tresdifficil.

Soit 1 (3) esgale à 7 (1) — 6

Divisons tout par 1 (1)

$$1\,(2) \text{ esgale à } 7 - \frac{6}{1\,(1)}$$

efficients de 6

1	6	On voit que 7 — l'efficient 6 est le quarré de 1.
2	3	Aussi 7 — 3 (qui vaut 4) est le quarré de 2.
—2	—3	

Donc 1 ou bien 2 seront la valeur de 1 (1). Mais quand on ne sçauroit qu'une solution, nous monstrerons la reigle pour trouver les autres: Or en ceste equation on trouve tousjours deux solutions par plus, & une par moins: comme icy 7 — — 2 (c'est à dire 9, car deux negations font une affirmation +) vaut la quarré de — 3 (notez que 9 est aussi bien quarré de 3 que de — 3) parquoy 1, 2, — 3 sont trois solutions. Item 1 (3) esgale à 75 (1) — 250 les trois solutions sont 5, 5, — 10.

Vn bon Arithmeticien se doit conduire selon les accidents, & prendre les facilitez lors qu'elles se presentent, & ce sans detriment des reigles generales; Stevin propose 1 (3) esgale à 300 (1) + 33915024, il la fait selon une maniere, laquelle combien qu'elle soit bonne, neantmoins est

E beau-

beaucoup trop longue, voicy comment j'y voudrois proceder, car comme dessus est dit, il faut s'esloigner des reigles generales lors que quelque facilité se rencontre. Car si, 1 (3) estoit esgale à 33915024 seulement, alors 1 (1) vaudroit plus que 323, comme la racine cubicque le monstre, parquoy il ne sera de besoin, comme il dit, d'aller esprouver si la valeur de 1 (1) est 1, 10, 100, 1000, &c. veu qu'on sçait desja que cest plus que 323. Voyez la 351 page de la derniere edition de son Arithmetique.

Parquoy pour prendre des efficients, il n'en faudra pas beaucoup, veu que du moins je commenceray à 323, ou de l'unité d'avantage.

1 (3) esgale à 300 (1) + 33915024

efficients

Divisons par 1 (1)

324 . 104676

$$1\,(2) \text{ esgale à } 300 + \frac{33915024}{1\,(1)}$$

Et devant que de faire d'autre efficients, j'esprouve si celuy-cy est propre (à cause que lesdits efficients sont grands nombres) ainsi

$$\begin{array}{r} 104676 \\ 300 \\ \hline 104976 \end{array}$$

lequel estant quarré de 324, je suis asseuré que 324 est la valeur de 1 (1).

D'autrepart si le nombre des (1) estoit plus grand comme

1 (3) esgale à 10367 (1) + 3774

Divisons par 1 (1)

$$1\,(2) \text{ sera esgale à } 10367 + \frac{3774}{1(1)}$$

Pour eviter beaucoup d'ouvrage, posez le cas que 1 (2) soit esgale à 10367 (car elle vaut davantage) alors 1 (1) vaudra plus que 101, & ainsi on commencera les efficients, plus que 101.

efficients

102 . 37

$$\begin{array}{r} 10367 \\ 37 \\ \hline 10404 \end{array}$$

Et pource que 10404 est quarré de 102, il s'ensuit que 102 sera la valeur de 1 (1)

Encor y a-il un autre moyen, par le moyen d'abreger, ce qui se fait par l'Isomere.

Soit

Soit 1 (3) esgale à 576 (1) + 25920

diviseurs proportionaux 1 . 12 . 144 . 1728.

quotients 1 (3) esgale à 4 (1) + 15

Dont la valeur de 1 (1) estant trouvée de 3, alors icelle divisée par $\frac{1}{12}$ (raison de l'Isomere) viendra 36 pour la valeur de 1 (1) requise.

Quelqu'un pourroit dire que je resouds bien les equations lors qu'elles sont en nombre entier, & non pas lors qu'elles sont en fraction, ou radicales.

S'il y a des fractions ou des radicaux en l'equation, j'ay demonstré cy devant comment l'Isomere les pourra reduire en nombres entiers communs, mais si la valeur de 1 (1) est rompue ou radicale, on la trouvera aisément en nombres communs (si on ne veut s'aider de la reigle ordinaire) on m'a donné à resoudre.

1 (3) esgale à 3 (1) — 1

Ainsi par l'Isomere 1 (3) est esgale à 300 (1) — 1000 (par la progression de 1, 10, &c) alors la valeur de 1 (1), selon la question proposée, se trouvera estre entre $1\frac{1}{2}$ & $1\frac{3}{5}$, c'est à dire entre $1\frac{5}{10}$, & $1\frac{6}{10}$.

Si on la veut avoir plus precise, on s'aidera de l'Isomere plus haute par la progression de 1, 100, 10000, 1000000, assavoir 1 (3) esgale à 30000 (1) — 1000000. S'aidant aussi de la valeur cogneue, qui sera icy en ceste grande equation entre 150 & 160, & touchant les efficients, on ne prend pas les neuf d'entredeux, mais premierement le milieu 155, par lequel on cognoist s'il faut cercher au dessus, ou dessous, tellement que qui y veut un peu practiquer, trouvera des facilitez incogneuës à ceux qui n'y ont jamais rien essayé, on trouvera que cest entre $1\frac{53}{100}$ & $1\frac{54}{100}$: mais beaucoup plus pres du $1\frac{53}{100}$: Et cerchant plus avant si on veut, on trouvera que ce sera entre $1\frac{532}{1000}$, & $1\frac{533}{1000}$: mais beaucoup plus pres du premier, &c.

Ayant cogneu une solution, on aura les deux autres facilement par icelle, selon qu'il dit cy apres.

1 (1) vaudra { 1,532 } tous deux trop peu, mais plus pres que l'unité
{ 347 } augmentée a la fin des nombres.
{ — 1,879

Ce qui est exprimé en disme jusques aux tierces.

Il y a encor des facilitez, qui peuvent souvent arriver, c'est lors que la 1 (1) vaut 1.

$$\text{comme } 1\,(3) \text{ esgale à } \begin{cases} 7\,(1) - 6, \text{ car } 7 - 6 \text{ est } 1 \\ 5\tfrac{1}{4}\,(1) - 4\tfrac{1}{4} \\ \tfrac{2}{3}\,(1) + \tfrac{1}{3} \end{cases}$$

Et aussi aux autres equations plus basse, ou plus haute que (3); & ayant une solution, on pourra remettre les autres cn question, comme on verra cy apres.

Le Theoreme qui doit suivre ayant besoin de nouveaux termes, les definitions s'ensuivront premierement.

I. Definition.

Equation simple, est celle qui n'a qu'une quantité esgale à un nombre: autrement elle est dite Composée ou Meslée.

Explication.

Comme quand 1 (2) est esgale à 49: ou 12 (1) esgale à 24, assavoir un terme estant esgal a l'autre; l'equation est simple & pure: Mais quand il y a plus de termes que deux, elle est Composée & Meslée, comme si 1 (2) est esgale a 6 (1) + 40, ou des semblables equations.

II. Definition.

Quand une grandeur est cōparée a une autre, la premiere est dite estre le subject, ou l'antecedant, l'autre le predicat, parangon, ou consequent.

Explication.

Comme quand 3 (2) — 4 (1) est esgale a 70; alors ces 3 (2) — 4 (1) sont dites estre le subject, & les 70 parangon ou consequent.

III. Definition.

Equation complette, est celle qui a toutes les quantitez sans en delaisser pas une.

IV. Definition.

Et equation incomplette est une equation meslée, qui n'a pas toutes ses quantitez.

Explication.

Par exemple soit 1 (6) esgale à 11 (5) + 13 (4) — 7 (3) + 6 (2) + 9 (1) — 31, telle equation est dite complette, pource qu'elle a toutes

les

les quantitez qui se peuvent trouver depuis la majeure (6), car elle a les (5) (4) (3) (2) (1) & (0); au contraire (1) (4) *) esgale à 5 (2) + 36, ou bien 1 (3) esgale à 12 (1) — 16, & autres de mesme façon sont dites incomplettes pour n'avoir toutes les quantitez depuis la majeure,

V. Definition.

Presque complette est une equation meslée, laquelle n'a qu'un defaut, & complette a deux pres est celle qui a deux defauts, & ainsi a trois pres, &c.

Explication.

Comme 1 (3) esgale à 7 (1) — 6 est presque complette, puis qu'elle n'a qu'un defaut; mais

VI. Definition.

Equation primitive est quand les denominateurs des quantitez sont entr'eux premiers.

Explication.

Comme 1 (4) esgale à 6 (3) — 13 (1) + 16 est primitive: car les denominateurs des quantitez (4) (3) (1) (0) sont entr'eux premiers.

VII. Definition.

Equation derivative est quand les denominateurs des quantitez sont entr'eux composez.

Explication.

Comme 1 (6) esgale à 7 (4) — 9 (2) + 12 (0), car alors les denominateurs (6) (4) (2) (0) sont entr'eux composez, car 2 est leur commune mesure, & (3) (2) (1) (0) sont les primitifs; item 1 (3) esgale à 17, est une equation derivative, & leurs quantitez (3) (0), sont derivatives des primitives, comme dit aussi Stevin en son Arithmetique, Defin 27e: Or les derivatives se resoudent comme les primitives, seulement ont une extraction davantage, selon la hauteur de la commune mesure.

VIII. Definition.

Es Equations meslées, la plus haute quantité est dite Maxime, ou haute extremité: Celle qui est un degré plus bas, est dite premier meslé; celle qui est encor un degré plus bas, est dite second meslé, & ainsi consequemment, tellement que le (0), est la fermeture ou basse extremité.

*) Doit être: 1 (4).

Explication.

Soit 1 (9) esgale à 3 (8) — 10 (6) + 4 (1) + 12: alors la 1 (9) est la maxime ou haute extremité: les 3 (8) le premier meslé: les 10 (6) le troisiesme meslé: les 4 (1) le huictiesme meslé: & le 12 est la basse extremité ou la fermeture le seul cogneu.

IX. Definition.

Es Equations meslées il y a trois ordres: le premier est dit Ordre prieur, lors que les nombres d'Algebre sont le subject (comme incogneuë a part) & la fermeture ou nombre commun est le predicat ou parangon (comme seul cogneu d'autrepart.) Le second ordre est l'alternatif, où les quantitez paires sont separées des impaires, tellement que la haute exremité soit + & non pas —: Le troisiesme est l'ordre posterieur, là où la haute extremité est seule avec le signe +, avec le nombre 1.

X. Definition.

Ordre alterne des Equations, est quand la maxime ou haute extremité n'a autre nombre que l'unité, avec le signe +, & que les denominateurs ou caracteres impairs sont d'un costé, & les pairs de l'autre, assavoir les uns au subject, les autres au predicat. Ce que sert à retrouver les signes originaux, en remettant l'equation en question.

Explication.

Soit 1 (7) esgale à 4 (6) + 14 (5) — 56 (4) — 49 (3) + 196 (2) + 36 (1) — 144 : ceste equation estant remise en l'ordre alternatif 1 (7) — 14 (5) + 49 (3) — 36 (1) sera esgale à 4 (6) — 56 (4) + 196 (2) — 144 (0); car alors les denominateurs impairs (7) (5) (3) (1) sont d'un costé, & les pairs de l'autre, & n'importe si les pairs ou impairs soyent au subject ou au parangon, ny la maxime non plus, moyennant qu'elle aye le signe de plus, & l'unité pour nombre, comme en l'exemple susdit: or cecy est pour recognoistre les signes, comme sera dit cy apres.

XI. Definition.

Quant plusieurs nombres sont proposez, la somme totale soit dite premiere faction: la somme de tous les produits de deux à deux soit dite deuxiesme faction: la somme de tous les produits de 3 à 3 soit dite la troisiesme faction, & tousjours ainsi jusques à la fin, mais le produit de tous

tous les nombres soit la derniere faction: or il y a autant de factions que de nombres proposez.

Explication.

Soyent proposez tant de nombres qu'on voudra 2, 4, 5, leur somme 11 est la premiere faction: les produits de deux à deux sont 8, 10, 20, dont la somme de tels produits 38 est dite deuxiesme faction: mais le produit de trois à trois 40 ne se trouve qu'une fois, & partant sera la derniere faction: item si ces quatre nombres estoyent proposez, 2, — 3, 1, 3: la premiere faction seroit 3, la deuxiesme — 7, la troisiesme — 27, & la quatriesme & derniere seroit — 18: finalement les factions de ces sept nombres 1, 2, 3, 4, — 1, — 2, — 3 seront 4, — 14, — 56, 49, 196, — 36, — 144. qui sont aussi sept en nombre.

XII. Definition.

				1				
			1		1			
		1		2		1		
	1		3		3		1	
1		4		6		4		1

Quand plusieurs unitez sont mises comme à costé, & des autres nombres au milieu, trouvez par le moyen d'addition telle figure, soit appellée triangle d'extraction: & l'unité d'enhaut signifier l'arithmetique simple, & les autres pour l'algebre; assavoir 1, 1, soit dit le rang des (1); & 1, 2, 1, le rang des (2); puis 1, 3, 3, 1, soit appellé le rang des (3), & tousjours ainsi à l'infiny.

I. Theoreme.

Si une multitude de nombres sont proposez, la multitude des produits de chacune faction se peut exposer par le triangle d'extraction: & par le rang d'iceluy selon la multitude des nombres.

Explication.

Soyent 4 nombres, il faudra prendre le rang des (4) au triangle d'extraction, qui est 1, 4, 6, 4, 1; le premier 1 signifie l'unité de la maxime; le 4 la premiere faction qui est la somme des 4 nombres; le 6 signifie que la deuxiesme faction est composée de 6 produits deux à deux; & ainsi du reste.

II. Theoreme.

Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomi-

denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes : & la premiere faction des solutions est esgale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes, est esgale au nombre du deuxiesme meslé; la troisiesme, au troisiesme, & tousjours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermeture, & ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

Explication.

Soit une equation complette 1 (4) esgale 4 (3) + 7 (2) — 34 (1) — 24 : alors le denominateur de la plus haute quantité est (4), qui signifie qu'il y a quatre certaines solutions, & non plus ny moins, comme 1, 2, — 3, 4 : tellement que le nombre du premier meslé 4, est la premiere faction des solutions, le nombre du deuxiesme meslé 7, & tousjours ainsi ; mais pour voir la chose en sa perfection, il faut prendre les signes qui se remarquent en l'ordre alternatif, comme 1 (4) — 7 (2) — 24 (0) esgale à 4 (3) — 34 (1) : alors les nombres avec leurs signes, (selon l'ordre des quantitez) seront 4, — 7, — 34, — 24, qui sont les quatre factions des quatre solutions.

Soit autrefois 1 (4) esgale à 4 (3) — 6 (2) + 4 (1) — 1, & en ordre alterne 1 (4) + 6 (2) + 1 esgal à 4 (3) + 4 (1); dont les nombres avec les signes, selon l'ordre des quantitez sont 4, 6, 4, 1, qui sont factions des quatre solutions 1, 1, 1, 1, & ainsi des autres; (notez icy que quand les solutions sont unitez sans moins, que les factions sont les nombres du triangle d'extraction du rang de la plus haute quantité,) de mesme en l'equation de la dixiesme definition, qui est 1 (7) esgale 4 (6) + 14 (5) — 56 (4) — 49 (3) + 196 (2) + 36 (1) — 144 ; il y aura 7 solutions, assavoir 1, 2, 3, 4, — 1, — 2, — 3 : desquels nombres l'exposition se fait en la dixiesme & onziesme definition.

Touchant les equations incomplettes, elles n'ont pas tousjours tant de solutions, neantmoins on ne laisse pas d'expliquer les solutions qui sont impossible d'exister, & monstrer ou gist l'impossibilité à cause de la defectuosité & incomplexion de l'equation, comme 1 (3) esgale à 7 (1) — 6, alors les trois solutions y sont encore, assavoir 1, 2, — 3; & toutes les incomplettes comme celle-cy se peuvent mettre en forme de complettes ainsi, 1 (3) esgale à 0 (2) + 7 (1) — 6, afin de trouver toutes les solutions ; comme celle qui a esté faite cy-devant, assavoir 1 (3) esgale à 167 (1) — 26; elle sera complette, ainsi 1 (3) esgale à 0 (2) + 167 (1) — 26 : & en

& en ordre alternatif, $1(3) - 167(1)$ esgal à $0(2) - 26$, les nombres avec leurs signes (selon l'ordre de leurs quantitez) seront $0, -167, -26$: c'est à dire trouvons trois nombres qui ayent telles factions, assavoir que leur somme soit 0, les produits de deux à deux -167, & le produit des trois -26; or en ayant trouvé un des trois comme cy-devant -13, alors puis que le produit des trois estoit -26, le produit des deux autres sera 2; or la somme des trois nombres est 0, & l'un est -13: donc la somme des deux autres sera 13; parquoy la question est remise à celle-cy, trouvons deux nombres dont la somme soit 13. & leur produit 2; (& notez qu'on dit trouvez deux nombres, ce sera donc une equation dont la majeure quantité est $1(2)$, on parle des factions aussi, c'est que la somme soit 13 & le produit 2; & ainsi $1(2) + 2$ sera esgale à $13(1)$, voila l'equation en ordre alterne, laquelle remise en commune pour la resoudre, on aura $1(2)$ esgale à $13(1) - 2$. & alors) les nombres de solution seront $6\frac{1}{2} + \sqrt{40\frac{1}{4}}$ & aussi $6\frac{1}{2} - \sqrt{40\frac{1}{4}}$, lesquels avec -13 feront les trois solutions requises; la preuve se fera comme on voudra tout du long.

Item $1(3)$ esgale à $300(1) + 432$, laquelle remise en ordre alterne ce sera $1(3) - 300(1)$ esgales à $0(2) + 432$; les factions seront $0, -300, 432$: donc trouvons trois nombres &c. Or l'un est 18; donc la somme des deux autres sera -18, & leur produit 24; parquoy $1(2)$ sera esgale à $-18(1) - 24$, les deux solutions sont $-9 + \sqrt{57}$ & $-9 - \sqrt{57}$, puis l'autre cy-dessus 18 feront les trois solutions requises: de mesme si $1(4)$ est esgale à $4(1) - 3$, alors les quatre factions seront 0, 0, 4, 3, & partant les quatre solutions seront

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 + \sqrt{-2} \\ -1 - \sqrt{-2} \end{array}$$

(Notez que le produit des deux derniers est 3:)

Donc il se faut resouvenir d'observer tousjours cela: on pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il ny a point d'autre solutions, & pour son utilité: l'utilité est facile, car elle sert à l'invention des solutions de semblables equations comme on peut remarquer en l'arithmetique de Stevin, en la cinquiesme differ. du 71 probleme; que s'il y

 avoit

avoit une question où la precedente se rencontre, & qu'au nombre de solution il faille adjouster 1, & puis ayant quarré la somme & y adjousté 2: on auroit quatre facits, 6, 6, 0, 0, tellement que 6 seroit seul & unique facit, à l'exclusion de tout autre, dequoy on n'eust jamais peu estre si certain sans les susdites solutions.

Par ce moyen on trouvera que jamais personne n'a resoud les equations cy-devant avec toutes leurs solutions.

Exemple en Stevin.

En ladite cinquiesme difference du 71 probleme, page 320 de mon edition, ou 344 de la vieille, si 1 (3) est esgale à 6 (2) — 10 (1) + 3, Stevin ne trouve que 3, & je trouve encor $1\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$ & encor $1\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$: Item plus haut si 1 (3) est esgale à 6 (2) — 12 (1) + 8; Stevin trouve 2, & je trouve 2, 2, 2, tellement que je suis asseuré qu'il n'y a que celle-la de 2, & luy en estoit incertain: de mesme plus bas si 1 (3) est esgale à 6 (2) — 9 (1) + 4: Stevin trouve 4, & je trouve encor 1, 1. Item à la difference troisiesme du probleme 69, page 293, de mon edition, si 1 (3) est esgale à 7 (1) — 6, Stevin trouve 2 & encor 1, & je dis qu'il y a encor — 3, lesquelles servent comme on voit en la cinquiesme difference du 71 probleme de Stevin, & le requiert à la fin du 70.

Touchant François Viete, qui surpasse tous ses devanciers en l'algebre; on peut voir en son traité (*De Recognitione Equationum cap.* 16. *pag.* 40. *de syncrysi*;) où il dit que telle syncrisis est pour trouver ou colliger la mutuelle comparaison de deux equations correlatives: & il oublioit pour parler generalement de dire és plans, & pour les solides, de trois correlatives, &c. car en la page 54 & 44: il ne trouve que deux solutions, (comme aussi en beaucoup de lieu dans ses livres) soit dit-il 124 (1) — 1 (3) esgale à 240: Il ne trouve que 2 & 10, & je trouve encor — 12, car voicy les factions 0, — 124, — 240.

Ainsi qu'on peut donner trois noms aux solutions, veu qu'il y en a qui sont plus que rien; d'autres moins que rien; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres semblables.

On peut colliger plusieurs choses de ces Theoremes, premierement l'intelligence du nombre des solutions; secondement la nature des equations, qui est qu'icelles ont leurs termes composé des factions, & que toutes les questions n'ont autre nœud; tiercement comment il est facile de faire

faire incontinent l'equation, quand la question est des factions, comme:

Trouvons trois nombres, dont la somme soit 12, les trois produits de deux à deux 41, leur solide 42.

Pource que toutes les factions sont denommées autant que trois nombres peuvent recevoir, on posera à part 1 (3): Et puis la somme des nombres 12, avec une quantité moindre subsequente 12 (2): Aussi 41 (1), finalement 42 (0), puis les ayant mis d'ordre alternatif, & ce selon les signes de la proposition (qui sont icy tous +) ou aura 1 (3) + 41 (1) esgale à 12 (2) + 42: lesquels remis en ordre posterieur 1 (3) sera esgale à 12 (2) — 41 (1) + 42: laquelle est apareillée pour resoudre: dont les trois solutions seront les trois nombres requis, & ainsi s'entendra des semblables questions.

Il pourroit sembler à quelqu'un que les factions seroyent encor expliquables autrement que dessus, comme au lieu de dire, la somme: les produits de deux à deux; les produits de trois à trois, &c. qu'on pourroit dire & plus simplement: La somme: la somme des quarez: la somme des Cubes, &c. ce qui n'est pas ainsi, car soyent plusieurs solutions, la somme sera pour le premier meslé, la somme des produits deux à deux pour le second meslé, &c. comme il a esté suffisamment expliqué; mais il n'en est pas ainsi des puissances comme on pourroit objecter.

Exemple.

Soit	A	premier meslé.
	B	second.
	C	troisiesme.
	D	quatriesme.
	&c.	

alors en toute sorte d'equation.	A	sont la somme des	solutions
	A q — B 2		quarez
	A cub — A B 3 + C 3		Cubes
	A q q — A q B 4 + A C 4 + B q 2 — D 4		quaré-quarez

Et pour mieux expliquer le tout, soit 1 (4) + 35 (2) + 24 esgale à 10 (3) + 50 (1): l'ordre des meslez est 10. 35. 50. 24 pour A, B, C, D, cy-dessus: tellement que 10 est voirement la somme des solutions qui sont (1, 2, 3, 4.) Or A q — B 2, c'est à dire le quarré de 10 — deux soit 35 c'est la somme des quarrez, & ainsi du reste; soit aussi qu'on

prenne une equation dont la haute extremité soit telle qu'on voudra, & avec des solutions de —, cecy s'ensuivra tousjours; qui monstre que telles puissances (quarrez, Cubes, &c.) cy dessusdits, ne font pas les meslez, mais au contraire, les meslez les font: bien loin de la simplicité des factions.

On en pourroit autant dire des proportionnelles là où on trouveroit que les factions font les meslez, & non pas les proportionnelles si simplement, car les factions sont faites sur les solutions, & les solutions sur les proportionnelles.

Exemple.

Soit 1 (3) esgale à 8 (2) + 12168: alors il y a quatre nombres continuellement proportionaux, 8, 12, 18, 27, dont le premier est 8, & la somme du ij & iiij est √ 12168 divisé par 8 (qui est 39) & la 1 (1) vaudra la somme de la j & iij. (qui est 26.)

Ie ne veux pas dire que les proportionnelles soyent à rejetter, nullement, car ce sont autant de proprietez, & de cecy voyez Viette au livre *De Recognitione Equationum.*

Davantage une solution estant cogneue, on peut remettre en question les autres sans memoires ny livre quelconque, dont les exemples cy-dessus en font foy. Voyons en encor quelques uns.

Soit 1 (4) esgale à 6 (3) + 9 (2) — 94 (1) + 120, & une valeur estant trouvée 2, on pourra remettre les autres trois en question: les meslez sont (comme l'ordre alternatif l'enseigne) 6. — 9. — 94. 120: Ce qui se peut faire sans peine (mais plus long chemin) par les postpositions ou bien en raisonnant: puis que la somme des quatre nombres est 6; nous avons 2, les trois autres seront ensemble 4, lequel on posera a part comme premier meslé de trois nombres requis, ainsi + 4 (2). Et d'autant que le produit general estoit — 120, iceluy divisé par 2 viendra — 60 pour le solide des requis que je mettray avec ledit 4 (2), n'importe comment.

Et puis que le produit de deux à deux estoit — 9: d'iceluy il faut oster le produit du 2 trouvé par la somme des trois requis 4, qui font 8, osté de — 9 reste — 17 pour les produits de deux à deux des requis (ce qui se pouvoit aussi trouver autrement en ayant un exemple devant soy) lequel comme second meslé sera — 17 (1), & pource qu'il m'en faut trois, la maxime sera 1 (3); & ainsi ay tous les meslez qu'il faut avoir,

avoir, les posant en ordre alterne avec les mesmes signes ainsi

1 (3) — 17 (1) esgales à 4 (2) — 60

puis si l'on veut en ordre posterieur tiré de là.

1 (3) esgale à 4 (2) + 17 (1) — 60

Que si on trouve encor une solution d'icy comme 3; on pourra trouver les deux autres, faisant de mesme que dessus, on trouvera

1 (2) esgale à 1 (1) + 20

Là où 1 (1) vaudra 4 aussi — 5, parquoy les quatre solutions requises de la premiere equation seront 2, 3, — 4, 5. & ainsi des autres: sans cercher toutes les reigles imparfaites que Viette en a donné.

Il y a de la determinaison aux equations comme nous en avons fait mention cy-dessus.

Soit 1 (2) esgale à 6 (1) — 10 (impossible d'estre esgal)

car la $\frac{1}{2}$ est 3
son quarre 9
avec — 10
— 1 duquel il faut extraire la √, ce qui n'est pas en la nature. donc ce 10 est trop, 9 estoit le plus haut.

Soit 1 (3) esgale à 12 (1) — 18 (impossible d'estre esgal)

car le $\frac{1}{3}$ est 4 — 9 qui est $\frac{1}{2}$ de 18
son Cube 64 — 81 son quarré.

Et puis que 81 est plus que 64, l'equation est impossible & inepte: ce qui a aussi esté dit auparavant, donc 18 est trop, veu que 16 eust esté au plus haut.

Cecy est propre; 1 (3) esgale à 3 (1) — 2 en petits nombres.

Soit 1 (3) esgale à 12 (2) — 257 (ce qui n'est possible d'estre esgal)

car les $\frac{2}{3}$ est 8
Son Cube 512
sa $\frac{1}{2}$ est 256
avec — 257 ce nombre estoit au plus haut d'e-
— 1 stre 256, parquoy 257 est trop.

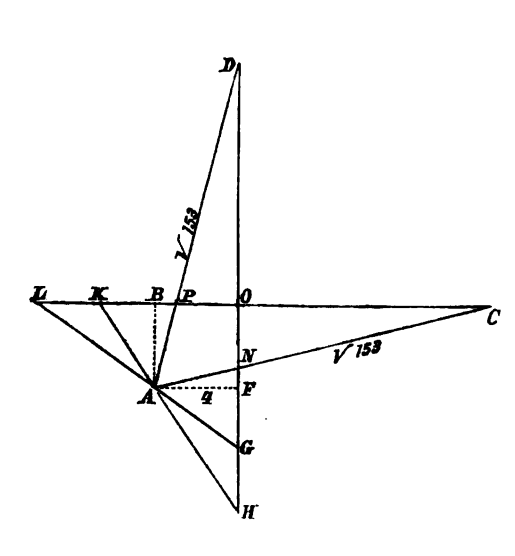
Cecy est propre 1 (3) esgale à 3 (2) — 4, & le 4 est au plus haut.

F 3 Soit

Soit 1 (4) esgale à	12 (3) — 2189 (aussi inepte)	
car les $\frac{3}{4}$ est	9	
son quarré-quarré	6561	
son $\frac{1}{3}$ est	2187	
avec	— 2189	ce nombre est trop, estant 2187 il seroit au plus haut.

Iusques icy nous n'avons encor expliqué à quoy servent les solutions par moins, quand il y en a. La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, & le moins recule, là où le + avance.

Probleme d'Inclinaison.



Soyent deux lignes droictes D G, B C, se couppant en angles droits en O, & indefinies, & du poinct A (dans la ligne qui couppe l'angle droit O en deux esgalement, ainsi que A B O F est quarré, dont chacun costé est 4) on mene une ligne A N C, ainsi que l'intercepte N C (entre les lignes données a angles droits D G, B C) soit √ 153, on demande la longueur de F N.

Ayant fait la position de F N 1 (1), on trouvera que 1 (4) sera esgale à 8 (3) + 121 (2) + 128 (1) — 256; & ainsi la valeur de 1 (1) recevra quatre diverses solutions.

assavoir	1	F N	
	16	F D	
	— $4\frac{1}{2}$ + √ $4\frac{1}{4}$	monstrant le poinct G	du poinct F
	— $4\frac{1}{2}$ — √ $4\frac{1}{4}$	monstrant le poinct H	

Assavoir monstrant lesdits poincts G & H, comme si les distances F G, F H estoyent moins que rien, en retrogradant, prenant que F N, F D avancent, & F G, F H reculent en arriere, tellement donc que les interceptes

interceptes CN, DP, GL, HK, tendent & s'enclinent au poinct A, faisant chacune $\sqrt{153}$, selon le requis.

Et pour l'interpreter encor mieux, les deux solutions qui sont moins que 0, se doivent changer, assavoir les signes.

$$\text{viendra} \begin{cases} 4\frac{1}{2} - \sqrt{4\frac{1}{4}} \text{ pour FG.} \\ 4\frac{1}{2} + \sqrt{4\frac{1}{4}} \text{ pour FH.} \end{cases}$$

Lesquels il faut poser au contraire de FN, FD, comme il est exprimé en la figure precedente : & ainsi le faudra-il entendre de toutes solutions par moins, qui est une chose de consequence en Geometrie, incogneuë auparavant.

S'ensuit aussi la maniere de traicter les postposées quantitez, lesquelles servent de beaucoup à la resolution des problemes. Car combien que par cy-devant on s'ayt servi des mesmes, ce n'a pas esté avec un si grand esclaircissement, ce que j'ay mis icy pour finir le present traicté d'Algebre.

Des postposées quantitez en l'Algebre.

STevin & ses devanciers comme Cardan, selon qu'il le cite és six Theoremes apres le 80e probleme de son Arithmetique, pag. 365 de la nouvelle edition, dit que l'invention de la postposée prime n'est pas encor trouvée, quand il y a un multinomie de ces postposées, & a ceste fin il se sert de quelques proportions qu'il dit avoir tiré du livre intitulé *Ars magna*, chap. 10. dudit Cardan ; I'ay entrepris de monstrer la facilité & la resolution de ce qu'il dit n'estre encor legitimement trouvé, afin que telles choses ne soyent doresnavant plus incogneües; Or pource que la marque de 1 sec. (1) pour postposée quantité signifiant 1 (1), secondement posée est trop prolixe, je prendray A pour la seconde (1).

Question du premier Theoreme.

Soyent 1 (1) M sec. (1) + 6 sec. (1) esgales à 3 (1).

c'est à dire selon nostre supposition, qui est plus claire.

A (1) + 6 A esgales à 3 (1)

Divisons tant le subject, que le comparé par 1 (1) + 6

alors A ou bien 1 sec. (1) sera esgale a $\frac{3\,(1)}{1\,(1) + 6}$

Question

Question du deuxiesme Theoreme.

Soit 1 (1) M sec. (1) esgale à 3 sec. (1) + 4 (1)

cest A (1) esgale à 3 A + 4 (1)

ostons de chacun costé 3 A, car il faut mettre ensemble les A, restera

A (1 (1) — 3) esgale à 4 (1)

Divisons tout par 1 (1) — 3, on trouvera que A vaudra $\frac{4\,(1)}{1\,(1) - 3}$

Question du troisiesme Theoreme.

Soyent 10 sec. (1) esgales à 1 (1) M sec. (1) + 3 (1)

cest 10 A esgales à A (1) + 3 (1)

ostons A (1) de part & d'autre, & le reste divisé par 10 — 1 (1), alors

A ou 1 sec. (1) vaudra $\frac{3\,(1)}{-1\,(1) + 10}$

Question du quatriesme Theoreme.

Soit 1 (2) esgale à 3 (1) M sec. (1) + 20 sec. (1)

cest 1 (2) esgale à 3 (1) A + 20 A

divisons tout par 3 (1) + 20

alors $\frac{1\,(2)}{3\,(1) + 20}$ sera la valeur de A ou de 1 sec. (1)

Question du cinquiesme Theoreme.

Soit 1 (1) M sec. (1) esgale à 2 (2) + 4½ sec. (I)

cest A (1), esgale à 2 (2) + 4½ A

ostons 4½ A, & divisons par 1 (1) + 4½

alors A ou 1 sec. (1) vaudra $\frac{4\,(2)}{2\,(1) - 9}$

Question

Question du sixiesme Theoreme.

Soyent 4 sec. (1) esgale à 1 (1) M sec. (1) + 6 (2)

cest 4 A esgale à A (1) + 6 (2)

ostons A (1), puis divisons par 4 — 1 (1)

alors A ou 1 sec. (1) vaudra $\frac{6\,(2)}{-1\,(1) + 4}$

Question 27 de Stevin devant les livres de Diophante, page 402 de la nouvelle edition: qui est aussi la quatriesme Question de Cardan, chapitre 10, livre 10, seulement les nombres changez; là où les susdits autheurs au nom de tous ceux de leur temps, ne l'ont pas sçeu resoudre sans l'aide de la quatriesme Question susmentionnée, comme Stevin le cònfesse là mesme: tellement que nous la resoudrons par la mesme voye, horsmis où il l'a trouvé incommode.

PArtons 26 en trois parties continuellement proportionelles, ainsi que le quarré de la moyenne, soit esgal à la somme du double du produict de la moyenne par la moindre, & le sextuple de la moindre.

Soit la moyenne partie requise	1 (1)
Et la moindre	A
Le quarré de la moyenne	1 (2)
Est esgal au double du produict de la moyenne, par la moindre 2 (1) A, avec le sextuple de la moindre partie, qui est 6 A, font ensemble	2 (1) A + 6 A

C'est icy ou ils se sont arrestez, mais nous acheverons, & passerons au travers de ce nuage, & puis que 1 (2) est esgale à 2 (1) A + 6 A, apres avoir divisé le tout par 2 (1) + 6, alors $\frac{1\,(2)}{2\,(1) + 6}$ vaudra & se mettra au lieu de A; pour la moindre partie; parquoy la majeure partie sera 2 (1) + 6.

La somme des trois parties doivent faire 26, mais la somme de la majeure, & moyenne est 3 (1) + 6, donc la moindre sera — 3 (1) + 20, esgale à $\frac{1\,(2)}{2\,(1) + 6}$ qui est aussi la moindre, & la reduction faite 7 (2) vaudront 22 (1) + 120, & achevant ceste equation 1 (1) vaudra 6, finalement les trois nombres, parties de 26, seront 2, 6, 18. dont la preuve est manifeste.

Fin de l'Algebre. G

De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée,

Par Albert Girard.

AFin de declarer le plus briefvement qu'il me sera possible, ceste science incogneuë jusques à present, si ce n'est devant le deluge, je dis que tout ainsi que pour mesurer un angle on doit signifier quelle partie il est d'un droit, ou de deux, ou bien de quatre droits, &c. sinon que l'on vueille poser que les quatre droits facent un certain nombre, comme 360 degrez, & là dessus on s'enquiere combien l'angle à mesurer tient de tels degrez.

Ainsi aussi devant que de venir à la mesure des triangles & polygones spheriques, nous poserons quelque nombre pour toute la superfice spherique, ou pour sa moitié qu'on appelle hemisphere, & à ceste fin l'on pourroit prendre 1, 10, 100, 1000, &c. ou quelque nombre de ceste progression pour plus grande facilité, lesquels pour dire vray seroyent meilleurs (à cause de la composition des nombres, lesquels on a astraints à la progression denaire sans aucune necessité) mais puis que le nombre de 360 a esté choisi pour estre adapté à la circonference totale, afin de mesurer les arcs & les angles, & que les tables des anciens, & modernes comme les sinus, tangentes, & secantes sont faites là dessus, je ne le pourrois rejetter sans amener quant & quant nouvelles difficultez, donc ce que je le retiens ce n'est pas pource qu'il est entre les nombres le plus pres du nombre des jours de l'an, qui ayt plus de parties aliquotes; je ne rejetteray non plus le mot de degré, combien qu'il ayt esté pris pour signifier le cours que le soleil fait en un jour: car tout ainsi que le nom de pied est admis en la mesure des solides & superfices, aussi bien qu'en la mesure des lignes, nonobstant que les pieds qui mesurent les solides soyent d'autre façon que ceux qui mesurent les superfices, & aussi que ceux qui mesurent les lignes; tout de mesme on a retenu le mot de degré pour mesurer les arcs & angles, combien que celuy qui mesure les arcs est arc, & celuy qui mesure les angles est angle; & aussi retiendray ce mot de degré pour la mesure des superfices spheriques, pour la mesure des angles solides, des secteurs de cercle, & de sphere qui sont six grandeurs en tout; ce n'est pas qu'on soit astraint à ceste mesure, car on ne s'est point astraint non plus à 360 pour la circonference, veu qu'on la mesure aussi avec des

mesmes

mesmes longueurs que celles qui mesurent le diametre, comme autrefois a fait Archimedes, premierement avec le 7 à 22, & puis maintenant & plus precisement, avec 113 à 355, sans amener icy la grand raison de Ludolf de Cologne: aussi que j'ay de certains noms arithmetiques autres que degrez, que j'adapte aux angles rectilignes, propres à des effects tres-briefs, incogneus auparavant, comme nous verrons cy apres, Dieu aydant, combien qu'en cela je ne rejette non plus les degrez pour leur mesure ordinaire, & plus simple: semblablement on sçait que les quarrez sont mesures les plus faciles de toutes les superfices, combien qu'il est possible de preudre autre figure superficielle a ceste fin; finalement puis que les mesures sont & doivent estre homogenes aux choses mesurées, on entendra & retiendra donc, que les degrez qui mesurent les arcs, seront aussi arcs; & qui mesurent les angles, seront angles; & qui les superfices, superfices: & qui les angles solides angles solides; & qui les secteurs spheriques aussi tels; voire finalement on pourroit appliquer les degrez és polygones inscripts aux cercles, prenant le cercle pour l'as; & pareillement prenant la sphere solide pour l'as, qui empescheroit de denotter les corps inscripts en icelle, & circonscripts à l'entour, selon la raison de leur capacité, à celle de la sphere, n'estoit que la pluspart se trouveroyent incommensurables à icelle, voire tous les cinq corps reguliers? Et pour terminer ce discours, je poseray donc que la superfice sphericque entiere contienne 720 degrez superficiels, & ce pour la raison qui sera notoire cy-apres, alors l'hemisphere en contiendra 360, selon l'hypotese suivante.

HYPOTHESES.

I. Nouvelle Hypothese.

SOit posé que toute la superfice sphericque, comme l'as, contienne 720 degrez superficiels, & partant la superfice de l'hemisphere 360 degrez: & chacun degré 60 minutes, &c.

Si tout estoit a refaire, touchant les tables mentionnées des anciens, je supposerois l'as 1, & iceluy contenir 10 (1), & chacune (1), 10 (2), &c. selon la disme.

II. Ancienne Hypothese.

Selon l'ancienne hypothese, que la circonference comme as

 contienne

contienne 360 degrez, & chacun degré 60 minutes, & la minute 60 secondes, &c. Aussi l'angle droit de 90 degrez angulaires, alors tout le lieu superficiel a l'entour d'un poinct sera 360 degrez.

III. Nouvelle Hypothese.

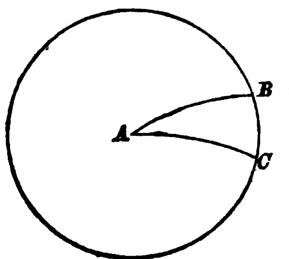
Suyvant la premiere hypothese, que l'angle droit solide (qui est un des 8 angles du cube) soit 90 degrez angulaires, alors tout le lieu solide a l'entour d'un poinct contiendra 720 degrez, qui sont 8 angles droits solides, tellement que tous les angles solides vaudront autant de degrez angulaires, que la superfice sphericque en contient, laquelle ils ont pour base, estant leur sommet au centre; & ainsi des secteurs, assavoir que la solidité de la sphere soit de 720 degrez solides.

On remarque icy, que comme il faut autant d'angles droits superficiels a l'entour d'un poinct, qu'il y en a à l'entour du quarré; qu'aussi il faut autant d'angles droits solides, a l'entour d'un poinct, qu'il y en a à l'entour du cube: c'est hypothese n'a besoin d'explication.

Definition.

Un triangle sphericque avec deux costez chacun de 90 degrez s'appelle fibulle: & l'angle qu'ils comprennent estant aigu, icelle sera dite fibulle aiguë, & ainsi de l'obtuse & rectangle.

Lemme I.

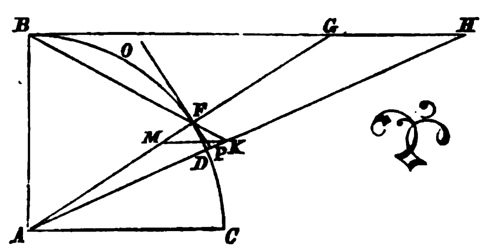


Soit A pole, du cercle BC majeur ou mineur sur la superfice de la sphere, & deux grands arcs du pole AB, AC; alors telle partie que A est de quatre droits, telle partie sera le triangle ABC de la superfice sphericque comprise par iceluy cercle BC: la demonstration est manifeste.

Lemme II.

Deux arcs d'un mesme cercle, chacun n'excedant le quadrant, & soyent

soyent trouvé leur Sinus & Tangentes, comparant le grand au petit; il y a plus grande raison de Tangente à Tangente, que d'arc à arc: semblablement il y a plus grande raison d'arc à arc que de Sinus à Sinus.



Soit ABC quadrant, & BD, BF, deux arcs chacun moindre à BC, leurs Tangentes BH, BG, je dis que comparant le grand au petit que HB aura plus grande raison à BG. que non pas l'arc DB à BF.

Car ayant menée par F, la touchante FB*), & BFK, & de K la parallele KM à BH: Alors icelle MK sera moindre à GH: aussi FD sera moindre à la touchante FP, & FP moindre à FK (car FPK est obtus, veu que APF est aigu, d'autant que AFP est droit) Or on amoindrit la raison en amoindrissant l'antecedant, ou en augmentant le consequent, parquoy

HG à GB est une raison, à laquelle
MK à GB, ou KF à FB est moindre
DF à FB
DF à FOB

Donc HG aura plus grande raison à GB, que DF à FOB, & en composant HB Tangente, aura plus grande raison, à BG Tangente, que l'arc DB à l'arc BOF, ce qu'il falloit premierement demonstrer.

Touchant l'autre partie, assavoir que comparant le grand au moindre; l'arc aye plus grande raison à l'arc, que le Sinus au Sinus, (lors que chacun arc est moindre au quadrant) la demonstration se pourra voir à la fin du neufiesme chapitre du premier livre de l'Almageste de Ptolomee, que Copernique aussi a mis en ses revolutions, au 6e Theoreme du 1 livre.

Lemme III.

Vn Polygone rectiligne, soit regulier ou irregulier, est tel, que les angles interieurs au long du circuit font autant d'angles droits, que le double du nom du polygone, mais de ce double ostez 4.

Soit un heptagone rectiligne, son nom est 7, son double est 14, duquel osté 4, reste encor 10, donc les angles interieurs au long du circuit d'un heptagone, font ensemble 10 angles droits; qui valent 900

G 3 degrez

*) Lisez: FB.

degrez, dont la demonstration est aisée, menant d'un poinct de dedans la figure, (où l'on veut) des lignes vers les angles, & des 7 triangles, rabattant 4 droits à l'entour dudit poinct, restera encor 10 droits.

Theoreme.

Tout polygone sphericque compris d'arcs de cercles majeurs, tient autant de degrez superficiels, que la somme de tous ses angles interieurs excede la somme des angles interieurs d'un polygone rectiligne de mesme nom: quand la superfice de la sphere est posée estre de 720 degrez superficiels.

Explication I.

Soit un triangle sphericque dont les trois angles font ensemble 190 degrez: & pource que tous triangles rectilignes n'ont pour la somme de leurs trois angles que 180 degrez, il s'ensuit selon le Theoreme que la superfice dudit triangle aura 10 degrez superficiels, & par consequent puis que toute la sphere en contient 720 des mesmes, il est notoire que le triangle proposé sera la 72e partie de toute la superfice de la sphere.

Notez.

Tout triangle sphericque (j'entens compris de cercles majeurs comme a l'accoustumée) est de telle nature que tous les trois angles font tousjours plus que 180 degrez, qui fait que jamais ny aura defaut en cela de pouvoir trouver l'excez: or tant plus un triangle sphericque occupe de superfice sphericque, tant plus la somme de ces trois angles excede le nombre de 180: aussi tant moins un triangle sphericque occupe de la superfice de la sphere, d'autant moins la somme de ces trois angles excedera le nombre de 180: mais nous delaisserons cela à la demonstration.

II.

Soit un heptagone sphericque, dont la somme des sept angles interieurs soit 940 degrez: or la somme des sept angles interieurs d'un heptagone rectiligne fait 900 degrez, parquoy l'excez est 40, qui signifient qu'un tel heptagone sphericque contiendra 40 degrez superficiels pour le requis: de mesme si un heptagone sphericque avoit 1020 degrez pour la somme de tous ces sept angles interieurs (au long du circuit) l'excez se trouveroit 120, pour signifier qu'iceluy heptagone sphericque contiendroit

droit 120 degrez superficiels, qui valent la sixiesme partie de toute la superfice de la sphere: il n'arrive pas tousjours que la superfice mesure precisement toute la sphere, mais ce que j'en ay fait est pour tant mieux declarer mon intention: car si un polygone sphericque de 100 costez avoit 17760 degrez pour la somme de ses 100 angles, on trouvera que sa superfice sera aussi 120 degrez superficiels, qui font la sixiesme de toute la superfice de la sphere; que si la somme des 100 angles eust esté 17850, sa superfice seroit 210 degrez superficiels, qui valent les $\frac{7}{24}$ de toute la superfice de la sphere: finalemeni si on donnoit un polygone ayant trois termes incogneus, & qu'on requiere la superfice: il faut cercher les angles, dont la somme cogneuë, & aussi la somme des angles d'un polygone rectiligne de mesme nom, l'excez sera la superfice requise.

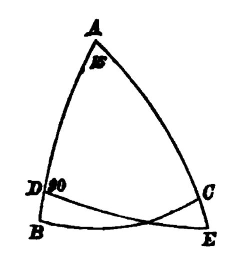
Mais pource qu'il seroit besoin de voir un exemple d'une question semblable, si un triangle equilateral a chacun costé de 109 degrez 28 minutes, chacun angle se trouvera estre de 120 degrez, & partant tous trois 360, que si on en oste 180, il restera 180 degrez superficiels, le quart de toute la superfice sphericque 720.

Item un triangle sphericque ayant ses trois costez de 40 degrez; 70 degrez; & de 38 degrez 30 minutes; alors la somme des trois angles est 192 degrez 5 minutes; (car iceux sont 81, 34. & 130, 3. & 30, 28. je dis qu'un triangle equilateral ayant chacun costé de 38, 50: sera esgal en superfice au mesme, car ils conviennent à la somme des angles 192, 5. parquoy la superfice sera 12, 5. qui est un peu davantage que la soixantiesme partie de toute la superfice sphericque.

Si un oeil (cest une figure sphericque appellée aussi du angle de deux demy cercles ayant deux angles en tout, & qui sont esgaux) à un des deux angles de 30 degrez, la somme des angles est 60, duquel il ne faut rien oster à cause qu'un polygone biligne (és figures rectilignes) n'est pas polygone, veu que deux lignes droictes n'enferment pas un espace & partant la somme des angles est 0, qu'il faut oster de 60 cy-dessus, restera 60 degrez superficiels pour la superfice de l'œil sphericque; tellement qu'à la somme des angles des yeux, il ne faut rien oster pour avoir leur superfice: Et pour examiner la chose davantage si on le coupe au milieu en deux triangles rectangles esgaux (que j'appelle fibulle) la superfice de l'un devroit donc estre 30 degrez superficiels: ce qui se trouve estre ainsi, car la somme des angles est 210.

On

On voit facilement la maniere de metamorphoser telles figures, en d'autres de mesme nom, ou autrement, en d'autres sortes comme les mixtes, (j'appelle mixtes les figures qui sont faites de cercles majeurs & mineurs; or arc majeur sur la superfice de la sphere est la plus grande, ou la moindre ligne qui se peut faire entre deux poincts, ou si on veut ce sont des arcs qui imitent les lignes droites; & les arcs de cercles mineurs imitent les courbes sur la superfice pleine.)



Exemple.

Soit ABC triangle sphericque mixte, assavoir BA, AC, arcs majeurs esgaux chacun de 36 degrez 52 minutes, comprenans un angle A de 15 degrez, & BC aussi estant un cercle mineur descrit sur le pole A: on veut faire un triangle rectangle sphericque ADE qui soit esgal au mixte ABC.

Mesure du Mixte.

Le verset de l'arc AB ou AC est fort pres de 20000, qui est la $\frac{1}{10}$ partie du diametre, partant le cercle entier de BC comprendra la $\frac{1}{10}$ de toute la superfice, c'est 72 degrez superficiels, mais ce secteur BAC ayant 15 degrez au pole, sera la $\frac{1}{24}$ de la targe, (c'est son cercle entier) or la $\frac{1}{24}$ de 72 est 3 degrez que contient ledit mixte ABC.

On le pourroit trouver plus aiséement, mais c'est pour m'expliquer, autrement je pourrois dire que pour mesurer un secteur tel que dessus ABC, alors le

Verset de AB multiplié par le nombre de l'angle A
divisé par le raid

sera pour la superfice dudit triangle mixte ABC, & ainsi des autres qui sont secteurs.

Mesure du triangle ADE.

Le triangle rectangle ADE doit aussi estre 3 degrez superficiels: par consequent ses trois angles doivent faire 180 degrez, & encor lesdits 3 degrez; c'est assavoir 183 degrez, mais les deux A, D font desja 105 degrez, donc E sera angle de 78 degrez.

Qui

Qui voudra cercher les costes, il faut de necessité que l'hypothenuse A E soit majeure à A C, au contraire il faut que A D soit moindre que A B ou A C, ce qu'on trouvera tousjours accorder en tels exemples qu'on voudra, car par le quatriesme accident des rectangles sphericques (de mes Tables de Sinus) A E sera 37 deg. 59 min. qui est davantage que A C 36 deg. 52 min. & A D sera 36 deg. 33 min. de necessité moindre à A B, aussi 36 deg. 52 min.

Touchant la base D E sa comparaison à B C, n'importe pas tant que les autres susdictes, toutesfois D E est 9 degrez 4 minutes; les 15 degrez de B C sont petits degrez, comme de cercles mineurs, que si on les vouloit reduire en mesme grandeur de degrez, que ceux des cercles majeurs, Sinus de A B est 60000 presque; donc 100000 donnent 60000 combien 15 degrez mineurs? facit 9 degrez des plus grands, pour la longueur de BC, lequel sera moindre en longueur à l'arc D E, 9 degrez 4 minutes.

Notez.

On sçait que tant plus l'angle A est petit, & qu'aussi tant plus pres l'arc A B est du quadrant, qu'alors tant moins y aura-il de difference entre les arcs A C, A E, aussi entre A D, A B, lesquelles choses recogneuës, il s'ensuit que la preuve arithmetique de ce Theoreme se peut faire (par maniere de parler) jusques à l'extremité, selon la presente maniere: aussi que les superfices planes des triangles qui ont les mesmes poincts A, D, E, doivent de necessité estre moindres que les superfices sphericques A, D, E, qui est encor un autre moyen pour esprouver la verité de ce mesme Theoreme, quand il ny auroit autre demonstration.

Davantage, on voit comment se peuvent remettre en question la maniere de coupper les triangles en tant de parties, & ce en telle raison qu'on voudra, par une ligne venant de l'angle ou d'un costé comme on voudra.

Par exemple, soit un triangle equilateral de la douziesme partie de la superfice sphericque, iceluy aura un chacun angle de 80 degrez (car la $\frac{1}{12}$ de 720 est 60 pour sa superfice, auquel adjousté 180, viendra 240, dont le tiers est 80 pour chacun angle) & un chacun costé de 77 d 52 m. 10 sec. mais delaissant les secondes (combien qu'il seroit bon de les admettre en la practique des triangles sphericques) & qu'on vueille couper ledit triangle par un arc majeur venant du sommet sur la base, dont l'un triangle soit le tiers du total; iceluy aura 20 degrez de superfice, que si on divise le total en deux esgalement par une perpend: on aura un petit trian-

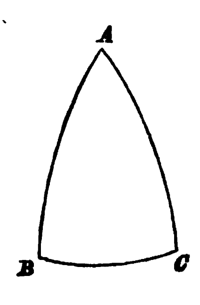
gle rectangle qui tiendra la moitié du requis, cest 10 deg. superficiels, adjoustez-y 180 deg. viendra 190 pour les trois angles dudit triangle rectangle, ostez-en 90 pour l'angle droit, restera 100 deg. pour les deux autres, or ladite perpendiculaire est 74 deg. 19½ min. alors on trouvera que sa base sera 13 deg. 9 min. 25 sec. environ, & les deux angles l'un 13 deg. 38 min. 44 sec. l'autre 86 deg. 20 min. 43 sec. qui font ensemble 99 deg. 59 min. 27 sec. qui est assez pres de 100: finalement les segmens de la base du triangle entier seront 26 deg. 46 min. 35 sec. & 52 deg. 5 m.

Pour donc venir à la demonstration de ce Theoreme general, je demonstreray premierement la proposition suyvante qui est espece d'iceluy.

Proposition.

Vn triangle sphericque de trois arcs majeurs, tient autant de degrez de superfice, que l'excez de la somme des trois angles sur 180 degrez.

I Demonstration particuliere és fibulles.

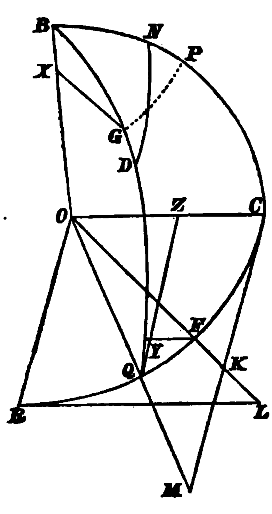


Soit ABC une fibulle, assavoir AB, AC, chacun quadran, alors l'angle A & l'arc BC conviennent en degrez, & les angles B, C, droits, donc si des trois angles A, B, C, on oste 180 degrez, assavoir B, C, il restera A, or toutes fibulles sont telles parties de la superfice de la sphere, comme la grandeur de la base BC, ou l'angle A, est à 720 degrez, ce qui est tresnotoire, voire mesme les unes envers les autres, comme leurs bases: donc la superfice ABC, tiendra autant de degrez superficiels, que l'excez des trois angles sur 180 degrez.

II Demonstration, és triangles rectangles sphericques, ayant un chacun costé defaillant: en conclusion probable.

Soit BND triangle rectangle sphericque, N angle droit, & soyent produits les arcs, ainsi que BQ, BC soyent quadrans, aussi produit l'arc CQ, ainsi que CQR soit quadrant, puis du centre de la sphere O soyent menées OB, OC, OQM, OR, à laquelle OR soit CM parallele (qui seront perpend. à OC) soit aussi GX perpend. à BO.

Et



Et d'autant que les trois angles du triangle sphericque BND, font ensemble plus que deux droits de necessité, aussi que N est droit, les deux B, D, feront plus qu'un droit, mais QC arc, tient autant de degrez que B, dont l'angle D fera plus que l'arc QR (car CQR est quadrant) soit RF esgal à l'angle aigu D, (j'entens en degrez, car les angles & lignes sont heterogenes) alors les trois angles du triangle BND feront plus que deux droits, de l'arc QF.

Il faut sçavoir que pour trouver l'hypothenuse BD, par la supputation des triangles rectangles sphericques, ayant la cognoissance des angles, ce sera;

Comme le Raid, à la Tangente de B, ainsi la Tangente de D, à la Secante de BD, c'est à dire;

comme OC à CM ainsi RL à Secante de BD.

donc $\frac{CM,\ in\ RL}{OC}$ esgal à Secante de BD.

Or par le deuxiesme Lemme cy-devant la grand Tangente à une moindre, a plus grand raison que l'arc à l'arc, donc MC à CK, ainsi QC a moins que CF, (prenons RL commune hauteur en la premiere raison, & OC commun diviseur: puis OC commune hauteur & QC diviseur en la seconde raison.

Comme $\frac{RL,\ MC}{OC}$ à $\frac{RL,\ CK}{OC}$ ainsi OC a moins que $\frac{OC,\ CF}{QC}$.

Le deuxiesme terme a pour numerateur RL, CK, produit de deux Tangentes de complemens, qui vaut tousjours le quarré du raid OC: lequel quarré de OC applicqué ou divisé par OC, viendra encor OC pour le deuxiesme terme cy-dessus.

Mais par ce qui a esté dit cy-devant que $\frac{CM,\ in\ RL}{OC}$ (qui est aussi le premier terme) valoit la Secante de BD. donc

Comme Secante de BD à OC, ainsi OC a moins que $\frac{OC,\ CF}{QC}$.

Là où on voit que le rectangle des moyennes est le quarré du raid, lequel vaut tousjours le rectangle de Secante, & Sinus d'arcs de comple-

mens, Or BD, DQ sont complemens, donc $\frac{OC,CF}{QC}$ sera plus que Sinus de DQ, assavoir, QC à CF, sera comme BO, a plus que Sinus de DQ, prenons donc un arc plus que DQ, & soit GQ, ainsi que OX son Sinus soit le vray quatriesme proportionel, alors $\frac{OC,CF}{QC}$ vaudra OX, voyla pour un item.

Davantage soit QZ perpendiculaire à OC, & FY perpendiculaire à QZ: Il faut sçavoir que par les trois angles donnez en un triangle rectangle sphericque, l'on peut par le moyen de la suyvante proportion trouver l'un des costez BN, qui fait l'angle droit.

Comme le Raid au Sinus de B, ainsi la Secante de D à la Secante de BN.

Assavoir que CO à QZ, ainsi OL à la Secante de BN.

Donc $\frac{QZ.\ in\ OL}{CO}$ sera esgal à Secante de BN.

Par le deuxiesme Lemme, un grand arc est au moindre en plus grand raison que le Sinus au Sinus. Or QZ & YZ sont Sinus de QC & CF.

Donc QC à CF a plus grande raison que QZ à ZY.

Prenons OC commune hauteur & QC commun diviseur en la premiere raison: de mesme en la seconde raison prenons OL commune hauteur, & OC commun diviseur.

Alors OC à $\frac{OC,CF}{QC}$ aura plus grande raison que $\frac{OL,QZ}{OC}$ à $\frac{OL.YZ}{OC}$.

Le numerateur du quatriesme terme est esgal au quarré du raid, pource que le rectangle d'une Secante & Sinus d'arcs complements est esgal au quarré du raid, or le quarré du raid applicqué ou divisé par le raid, fait avoir le raid OC.

Le troisiesme terme $\frac{OL,QZ}{OC}$ est esgal (par la precedente equation) à la secante de BN.

Donc OC à $\frac{OC,CF}{QC}$ aura plus grande raison que Secante de BN à OC.

Tellement que quarré du raid OC (ou bien le rectangle d'une Secante de BN, & du Sinus de NC qui sont complement l'un de l'autre, lequel rectangle doit estre esgal au quarré du raid) sera majeur au rectangle $\frac{OC,CF}{QC}$, & de la mesme Secante de BN: ceste hauteur commune de ladicte Secante estant ostée, alors le Sinus de NC sera encor plus grand que $\frac{OC,CF}{OC}$ *). Puis

*) Lisez: $\frac{OC,CF}{QC}$.

Puis que le Sinus de N C est plus grand que $\frac{OC, CF}{QC}$, prenons un Sinus, d'un arc moindre à N C, qui soit esgal à $\frac{OC, CF}{QC}$; or en la premiere partie de ceste demonstration on a trouvé que OX (sinus de GQ) y estoit esgal, & alors ce GQ devoit exceder l'arc DQ, & à present il a esté demonstré qu'il doit estre moindre à NC.

Donc du pole B soit fait un arc passant par G, il s'ensuit que tel arc doit coupper DN entre D, N, & terminer dans BN, en un poinct P, entre N, C. voyla un autre remarque.

Parquoy puis que OX est esgal à $\frac{OC, CF}{QC}$, alors comme QC à CF ainsi CO ou BO à OX, & par raison converse CQ sera à QF comme OB à BX.

Or parce qu'on peut inferer des livres d'Archimedes, comme OB a BX, ainsi la superfice de la fibule QBC à la superfice de GBP.

Mais aussi la circonference à CQ, est comme l'hemisphere à QBC : d'où s'ensuit une proportion ordonnée.

Circonference	Hemisphere
CQ	GBP
QF	QBC
d'une part	d'autre part

Il s'ensuit que par raison esgale la circonference sera à QF, comme la superfice de l'hemisphere à GBP, & partant si on menoit BF, alors la superfice de QBF seroit esgale audit GBP, car QBF peut estre le quatriesme proportionel.

De tout ce que dessus, il s'ensuit que la fibule QBF (si on menoit BF) a trois angles esgaux aux trois angles du triangle BND, car ils surpassent deux droits de la valeur de l'arc QF.

Que telle fibule QBF est esgale à BGP mixte. Et que ledit mixte BGP veut esgaler le triangle BND puis qu'il le croise tousjours, car GP croise tousjours DN.

Donc la fibule QBF veut esgaler le triangle BDN, ayant tous deux les trois angles excedans deux droits, de la quantité de l'arc QF en degrez : & par ce qui a esté dit des fibules en la premiere demonstration ; la verité du Theoreme est manifeste & probable.

Finalement puis que cecy accorde avec nostre Theoreme incessamment, tousjours quand mesme ND seroit trespetit jusques à l'infiny & BD, quasi quadrant, car alors GD ou NP sont trespetites, & neantmoins GP croise tousjours, il s'ensuit que BGP sera esgal au triangle BND a la confirmation du Theoreme : notez que j'ay esprouvé en

deux divers exemples que G D estoit plus que double à N P: item que B P ou B G estoit moindre que la moyenne harmonicque entre D B, & B N.

I I I Demonstration en tous triangles sphericques.

Puis que tous les triangles sphericques se peuvent diviser en deux triangles rectangles, il s'ensuit que la precedente deuxiesme demonstration s'estendra jusques aux triangles sphericques en general; car tout revient a un: veu que divisant un triangle en deux parties esgales ou inesgales, on aura deux triangles & 180 degrez plus que devant, que si on oste deux fois 180 degres, pource qu'il y a deux triangles; c'est autant que si du premier on en ostoit 180 seulement.

I I I I Demonstration de tous les polygones sphericques.

La deuxiesme & troisiesme demonstration s'estendent jusques aux polygones sphericques en general, composez de grand cercles; veu que tout polygone se resoud & descoupe en triangles.

Par les nombres on pourroit faire des demonstrations particulieres, aussi en une superfice sphericque enclose par une circonference (laquelle superfice s'appelle targe) on pourroit mener des lignes de cercles majeurs du pole à la circonference, & faire plusieurs secteurs esgaux ou non, & puis mener des arcs majeurs à la maniere des costez des polygones inscrits, & puis comparer les secteurs aux triangles: mais le Lecteur se contentera presentement de la demonstration contingente, jusques a ce qu'ayant plus de loisir je la donne à sa perfection.

On pourra encor voir les choses suyvantes où l'on trouvera matiere propre a faire l'espreuve comme aux angles qui sont parties aliquotes des huict droits: de mesme on en trouvera quelques espreuves dans mes Tables de Sinus à la fin.

Du mesurer des angles solides lesquels sont circuits de superfices planes.

Pour faire cela, il faut mesurer les inclinaisons des plans, & les adjouster ensemble, & de la somme en oster la somme des angles d'un polygone rectiligne de mesme nom que la base, le reste sera la valeur requise de l'angle solide: Exemple, en la pyramide reguliere l'angle solide est compris de trois angles plans, dont l'inclinaison des plans est de 70 deg.

32 min.

32 min. il y en a trois & esgaux, ce sera ensemble 211 deg. 36 min. duquel osté 180, à cause que la figure de la base est triangle, restera 31 deg. 36 m. pour la valeur de l'angle solide de la pyramide, lequel environ la 22e partie de huict droits, je dis environ, pource qu'il en faut $22\frac{3}{4}$ fort pres, & ne doute pas qu'il ne soit incommensurable au tout, assavoir à huict droits: & ainsi des autres, qui est une maniere fort facile à la practique, de mesme des secteurs de sphere.

Corrollaire.

Il s'ensuit de tout ce que dessus a esté dit, que la mesure des angles solides sera facile, & que les cinq corps reguliers ont aussi des angles solides esgaux & pareils au centre; car par le tetrahedre ou pyramide on cognoit que tout le lieu à l'entour d'un poinct peut estre remply par quatre angles solides esgaux, chacun compris de trois angles plans esgaux obtus de 109 deg. 28 min.

L'exaedre ou Cube fait cognoistre que le lieu corporel à l'entour d'un poinct se peut diviser en six angles solides esgaux & pareils, chacun ayant quatre angles plans esgaux, aigus, de 70 deg. 32 min.

L'octaedre a huict angles droits, solides au centre, qui sont esgaux entr'eux & pareils, compris de trois angles plans de 90 degrez chacun.

Le Dodecaedre a douze angles solides au centre, qui sont esgaux entre eux & pareils, compris de cinq angles plans, aigus, chacun de 41 d. 48 m.

L'icosaedre a 20 angles solides au centre, qui sont esgaux entr'eux, & pareils, compris de trois angles plans, aigus, chacun de 63 deg. 26 min.

Devant que de passer outre on remarque icy une convenance avec l'inclination des plans des cinq figures regulieres, comme s'ensuit.

Inclination des plans des cinq figures regulieres.

Tetraedre	70 deg.	32 min.	
Cube	90.	0	
Octaedre	109.	28	
Dodecaedre	116.	34	} les adjoints de ceux-cy sont
Icosaedre	138.	12	} mentionnez cy-dessus.

Pour revenir à la mesure des angles solides, compris de superfices planes, soit par exemple qu'un angle solide de cinq plans; dont les inclinations d'iceux plans soyent trouvé de 110, 90, 151, 120, & 118 degrez; la somme est 589, ostez-en 540 (autant font les cinq angles d'un pentagone

